

**Die Transfiguration ebener Kurven
von rechtwinkligen cartesischen auf A-Normalen-
und A-Strahlbüschel-Koordinaten.**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität zu Rostock,

vorgelegt von

Fr. Harms, cand. math.

aus Borbeck in Oldenburg.

Rostock 1913.

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät
zu Rostock.

Referent: Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. Staude.

Meiner lieben Braut

gewidmet.

Inhalt.

Seite

Die Transfiguration ebener Kurven von rechtwinkligen cartesischen auf A-Normalen- und A-Strahlbüschel-Koordinaten.

§ 1.	Transfigurationen	1
§ 2.	Die Wickelkurven	4
§ 3.	Die Zerrwickelkurven	6
§ 4.	Die Wickelkurven algebraischer Kurven	7

Die Gerade als Abszissenkurve.

§ 5.	Die Gerade als Abszissenkurve im Normalen-koordinatensystem	9
§ 6.	Die Gerade als Abszissenkurve im Strahlbüschelkoordinatensystem	10
	Die Geraden-Zerrgeraden	15
	Die Geraden-Zerrkegelschnitte	21

Die Kegelschnitte als Abszissenkurven.

§ 7.	Die Kegelschnitte als Abszissenkurven im Normalenkoordinatensystem	24
§ 8.	Die Kegelschnitte als Abszissenkurven im Strahlbüschelkoordinatensystem	26

Die Kreiswickelkurven.

§ 9.	Die Kreiswickelkurven algebraischer Kurven	30
§ 10.	Die Kreiswickelkurven der trigonometrischen Linien	31
	I. Die Kreiswickelkurven der Sinuslinie	33
	II. Die Kreiswickelkurven der Tangenslinie	36
	III. Die Kreiswickelkurven der Secanslinie	39

Schluss	44
-------------------	----

Figurentafeln.

§ 1. Transfigurationen.

Die gebräuchlichsten Koordinatensysteme sind das cartesische und das Polarkoordinatensystem.

Im rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystem werden die Abszissen auf einer Geraden, die Ordinaten von dieser Geraden aus auf dazu senkrechten Geraden gemessen.

Im Polarkoordinatensystem werden die Abszissen auf der Peripherie des Einheitskreises, die Ordinaten vom Mittelpunkt desselben aus auf den Radien gemessen.

Beiden Koordinatensystemen ist also gemeinsam, dass die Abszissen auf Kreisen gemessen werden — nämlich bei Polarkoordinaten auf dem Einheitskreise, bei cartesischen Koordinaten auf einem Kreise mit dem Radius ∞ — und die Ordinaten auf Geraden, die zur Peripherie dieser Kreise senkrecht stehen, also auf den Radien derselben.

Das Polarkoordinatensystem und das cartesische sind daher Spezialfälle von einem Koordinatensystem, in dem die Abszissen auf einem Kreise vom Radius r , die Ordinaten auf den Radien dieser Kreise gemessen werden. Weil die Koordinaten in diesem

Koordinatensystem auf einem Kreise und seinen Normalen gemessen werden, können wir es Kreis-Normalen-Koordinatensystem nennen. Den Kreis, auf dem die Abszissen gemessen werden, nennen wir den „Abszissenkreis“.

Wir können vom Kreis-Normalen-Koordinatensystem zum rechtwinkligen cartesischen gelangen, indem wir den Punkt O auf der Peripherie des Abszissenkreises, von dem aus wir die Abszissen messen, festhalten und den Mittelpunkt des Abszissenkreises auf dem durch O gehenden Radius ins Unendliche rücken. Der Punkt O wird dann der Anfangspunkt des cartesischen Koordinatensystems, vorausgesetzt, dass die Ordinaten von der Peripherie des Abszissenkreises aus gemessen werden.

Messen wir die Ordinaten nicht von der Peripherie des Abszissenkreises aus, sondern von der Peripherie eines mit ihm konzentrischen Kreises vom Radius $(r - 1)$, und lassen dann den Radius des Abszissenkreises zu 1 werden, so gelangen wir zum Polarkoordinatensystem.

Auf dieselbe Weise können wir auch umgekehrt vom rechtwinkligen cartesischen bzw. vom Polarkoordinatensystem zum Kreis-Normalen-Koordinatensystem gelangen.

Das Grösser- und Kleinerwerden des Abszissenkreises wollen wir uns nun so vorstellen, als ob die Peripherie aus sich selber herausgezogen bzw. in sich selber hineingeschoben würde.

Denken wir uns nun irgendeine Kurve Γ gegeben in einem rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystem und gehen auf die beschriebene Weise von rechtwinkligen cartesischen zu Kreisnormalenkoordinaten über, so wird sich die Gestalt der Kurve Γ genau in der Weise ändern, als wenn wir die Kurve mit der Abszissenachse fest verbunden denken und die Abszissenachse auf den Abszissenkreis aufwickeln.

Wir können dies Verfahren mit „Transfiguration der Kurve Γ von rechtwinkligen cartesischen auf Kreisnormalenkoordinaten“ bezeichnen.

Eine viel allgemeinere entsprechende Transfiguration der Kurve Γ würde ihre Transfiguration von rechtwinkligen cartesischen auf Normalenkoordinaten irgendeiner Kurve A sein.

Wir wollen uns nun die Aufgabe stellen, zu untersuchen, was für eine Gestalt eine Kurve Γ annimmt, wenn wir sie von rechtwinkligen cartesischen auf A -Normalenkoordinaten transfigurieren.

Es ist ohne weiteres klar, dass die neue Kurve in A-Normalenkoordinaten dieselbe Gleichung besitzt wie die alte Kurve in rechtwinkligen cartesischen; denn die Abszissen und Ordinaten der alten Kurve in cartesischen Koordinaten haben genau dieselben Grössen wie die entsprechenden Abszissen und Ordinaten der neuen Kurve in A-Normalenkoordinaten.

Die Methode, Kurven zu erzeugen, indem man die Gleichung einer Kurve auf irgendein anderes Koordinatensystem überträgt, nennt Loria die „Methode der Koordinatenverwandlung“.¹⁾

Eine Anwendung dieser Methode findet sich zuerst bei Varignon²⁾. Später findet sie mehrfach Anwendung bei Peters³⁾, Krause⁴⁾ und Cesarò⁵⁾, sowie bei Cantor⁶⁾ und Tortolini⁷⁾.

Da wir die durch Transfiguration der Kurve Γ von cartesischen auf A-Normalenkoordinaten entstehende Kurve Γ_w geometrisch erhalten, indem wir die Kurve Γ mit der Abszissenachse des cartesischen Systems fest verbinden und die Abszissenachse auf die Kurve A aufwickeln, so können wir die Kurve Γ_w als die „A-Wickelkurve der Kurve Γ “ bezeichnen.

Kreisnormalenkoordinaten sind nun aber nicht nur ein Spezialfall von A-Normalenkoordinaten, sondern auch von A-Strahlbüschelkoordinaten. Das A-Strahlbüschelkoordinatensystem besteht aus einer Kurve A, auf der die Abszissen, und einem Strahlbüschel, auf dem von der Peripherie der Kurve A aus die Ordinaten gemessen werden. Hiernach ergibt sich sofort, dass das Kreis-

¹⁾ Loria: „Ebene Kurven“ (Leipzig 1902), VII. Abschnitt. Erstes Kapitel. Vergl. ebd. die in den Fussnoten angegebene Literatur.

²⁾ Petr. Varignon: „Nouvelle formation de spirales, beaucoup plus differentes entre elles de ce qu'on peut imaginer d'autres courbes quelconques à l'infini; avec les touchantes, les quadratures, les déroulements et la longueur de quelques arcs de ces spirales, qu'on donne seulement ici pour exemple de cette formation générale.“ (Mém. de Paris, Année MDCCIV, Paris 1722.) Ueber die Varignonsche Methode vergl. auch Loria: „Ebene Kurven“, pag. 595 ff.

³⁾ A. Peters: „Neue Kurvenlehre.“ (Dresden 1835.)

⁴⁾ C. C. F. Krause: „Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima Auctore Carolo Christiano Friederico Krause. Edidit: Professor H. Schröder. Monachii anno MDCCCXXXV.“

⁵⁾ Cesarò: „Lezioni di geometria intrinseca.“ (Neapel 1896.)

⁶⁾ M. Cantor: „Ueber ein weniger gebräuchliches Koordinatensystem.“ (Diss. Frankfurt a. M. 1851.)

⁷⁾ B. Tortolini: „Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes.“ (Crelles Journal XXVI, 1843.)

normalenkoordinatensystem nichts anderes ist als ein Kreis-Strahlbüschelkoordinatensystem, in welchem der Scheitel des Strahlbüschels im Mittelpunkte des Kreises gelegen ist.

Die Transfiguration einer Kurve auf Kreisnormalenkoordinaten ist daher auch ein Spezialfall der Koordinatenverwandlung von cartesischen auf Kreis-Strahlbüschelkoordinaten, oder, noch allgemeiner, ein Spezialfall der Koordinatenverwandlung von cartesischen auf A-Strahlbüschelkoordinaten. Der Vollständigkeit halber wollen wir daher auch diejenigen Formeln aufsuchen, welche diese Koordinatenverwandlung ausdrücken.

Die Aenderung des Kurvenbildes bei Transfiguration von cartesischen auf A-Strahlbüschelkoordinaten kann man sich folgendermassen vorstellen:

Denken wir uns von der Wickelkurve Γ_w die Lote auf die umwickelte Kurve A gefällt, so schneiden sich je zwei benachbarte derselben immer auf der Evolute der Kurve A. Nehmen wir nun irgendwo in der Ebene einen festen Punkt Z an und drehen die einzelnen Lote um ihren Schnittpunkt mit der Kurve A, bis sie alle durch den Punkt Z gehen, und halten wir dabei auf ihnen die einzelnen Punkte der Wickelkurve fest, so bilden nach der Drehung die einzelnen Punkte eine neue Kurve Γ_z , welche die Wickelkurve Γ_w in verzerrter Gestalt darstellt, und die wir die „A-Zerrkurve der Kurve Γ_w “ oder die „A-Zerrwickelkurve der Kurve Γ “ nennen können. Den Punkt Z wollen wir den „Zerrpunkt“ nennen.

Ein besonderer Fall von Zerrwickelkurven ist wieder derjenige, wo der Zerrpunkt ins Unendliche gerückt ist. Dieser Spezialfall soll uns hier jedoch nicht weiter beschäftigen.

Unsere Aufgabe wird also sein, die Gleichungen der A-Wickelkurven und der A-Zerrwickelkurven in cartesischen oder in Polarkoordinaten darzustellen.

§ 2. Die Wickelkurven.

In cartesischen Koordinaten sind die Kurven

$$A(x, y) = 0$$

und

$$\Gamma(x, y) = 0$$

gegeben. Die A-Wickelkurve der Kurve Γ ist dann definiert als diejenige Kurve, die in A-Normalenkoordinaten die Gleichung hat:

$$\Gamma(\sigma, \delta) = 0,$$

wobei σ die von einem festen Punkte C aus auf der Peripherie der Kurve A gemessenen Abszissen, δ die auf den Normalen gemessenen Ordinaten bedeuten.

Hat C im cartesischen System die Abszisse a, so ist

$$\sigma = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Der Punkt Q $\{x, y\}$ der Kurve A und der Punkt P $\{\xi, \eta\}$ der Kurve Γ_w haben, wenn sie beide auf derselben Normalen der Kurve A liegen, den Abstand

$$\delta = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

wobei x, y, ξ und η noch durch die Normalengleichung der Kurve A verbunden sind:

$$(x - \xi) \cdot \frac{\partial A}{\partial y} = (y - \eta) \cdot \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Die Gleichung der A-Wickelkurve der Kurve Γ berechnet sich demnach aus den 5 Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad A(x, y) = 0, \\ (2) \quad (x - \xi) \cdot \frac{\partial A}{\partial y} = (y - \eta) \cdot \frac{\partial A}{\partial x}, \\ (3) \quad \sigma = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx, \\ (4) \quad \delta = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = (\eta - y) \sqrt{1 + y'^2}, \quad (\text{nach (2)}) \\ (5) \quad \Gamma(\sigma, \delta) = 0. \end{array} \right.$$

Der Weg bei der Aufstellung der Gleichung wäre etwa folgender: Aus (1) und (2) berechnen wir x und y , drücken also x und y als Funktion von ξ und η aus. Die erhaltenen Werte setzen wir in (3) und (4) ein und haben somit auch σ und δ als Funktion von ξ und η dargestellt. Hierauf setzen wir die so erhaltenen Werte von σ und δ in (5) ein und erhalten damit die Gleichung der A-Wickelkurve der Kurve Γ in laufenden Koordinaten ξ, η :

$$\Gamma_w(\xi, \eta) = 0.$$

Da σ und δ wegen der auftretenden Wurzelzeichen zwei-deutig sind, so können wir bemerken, dass im allgemeinen von jedem Punkte der Kurve A, welcher die Abszisse a hat, 4 Zweige unserer Wickelkurve ausgehen, nämlich:

$$\begin{aligned} \Gamma(+\sigma, +\delta) &= 0, \\ \Gamma(-\sigma, +\delta) &= 0, \\ \Gamma(+\sigma, -\delta) &= 0, \\ \Gamma(-\sigma, -\delta) &= 0. \end{aligned}$$

Im ganzen besteht die Kurve Γ_w daher aus 4ν Zweigen, wenn ν die Anzahl der Schnittpunkte der Geraden $x = a$ mit der Kurve $A(x, y) = 0$ ist.

§ 3. Die Zerrwickelkurven.

Die Gleichung der Abszissenkurve sei hier in Polarkoordinaten gegeben:

$$A(r, \varphi) = 0.$$

Da wir von den Zerrwickelkurven mit ∞ fernem Zerrpunkt absehen wollen, so können wir, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, den Scheitel des Strahlbüschels in den Koordinatenanfang O legen.

Die A-Zerrwickelkurve der Kurve

$$A(x, y) = 0$$

ist nun definiert als diejenige Kurve, die in A-Strahlbüschelkoordinaten die Gleichung

$$\Gamma(\sigma, \delta) = 0$$

hat, wo σ die von einem festen Punkte C der Kurve A aus auf deren Peripherie gemessenen Abszissenbögen, und δ die auf den Strahlen des Strahlbüschels von der Peripherie der Kurve A aus gemessenen Ordinaten bedeuten.

Es ist, wenn C die Amplitude φ_0 hat,

$$\sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi.$$

Ferner ist

$$\delta = \rho - r.$$

Zur Bestimmung der Gleichung der A-Zerrwickelkurve der Kurve Γ haben wir somit die 4 Gleichungen:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad A(r, \varphi) = 0, \\ (2) \quad \sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi, \\ (3) \quad \delta = \rho - r, \\ (4) \quad \Gamma(\sigma, \delta) = 0. \end{array} \right.$$

Ist die Kurve A in cartesischen Koordinaten gegeben, so haben wir zur Bestimmung der Gleichung der A-Zerrwickelkurve der Kurve Γ folgende 5 Gleichungen:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad A(x, y) = 0, \\ (2) \quad x : y = \xi : \eta, \\ (3) \quad \sigma = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx, \\ (4) \quad \delta = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \\ (5) \quad \Gamma(\sigma, \delta) = 0. \end{array} \right.$$

Der Weg, den wir einschlagen, um die Gleichung aufzustellen, ist ganz entsprechend wie in § 2. Auch gilt von der Anzahl der Kurvenzweige dasselbe wie dort, was auch sofort klar ist nach dem, was in § 1 über die Erzeugung der Zerrwickelkurven aus den Wickelkurven gesagt ist.

Lautet die Gleichung (I, 4):

$$\delta = \gamma = \text{const.},$$

so erhalten wir die Kurven, welche man als „Konchoiden mit beliebiger Basis“ zu bezeichnen pflegt.¹⁾ Die Gleichung derselben ergibt sich als:

$$(III) \quad A(\rho - \gamma, \varphi) = 0.$$

§ 4. Die Wickelkurven algebraischer Kurven.

Lautet die Gleichung der Abszissenkurve

$$A(x, y) = \sum_0^n pq \alpha_{pq} x^p y^q = 0, \quad (p + q \leq n),$$

so ist:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_0^n pq \cdot p \cdot \alpha_{pq} \cdot x^{p-1} \cdot y^q,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sum_0^n pq \cdot q \cdot \alpha_{pq} \cdot x^p \cdot y^{q-1}.$$

Die Gleichung (2) des § 2 lautet also in diesem Falle:

$$(x - \xi) \cdot \sum_0^n pq \cdot q \cdot \alpha_{pq} \cdot x^p y^{q-1} = (y - \eta) \cdot \sum_0^n pq \cdot p \cdot \alpha_{pq} x^{p-1} \cdot y^q.$$

¹⁾ Ueber Konchoiden mit beliebiger Basis vergl. Loria: „Ebene Kurven“, pag. 135 ff.

Hieraus folgt durch geeignete Zusammenfassung:

$$\sum_0^n pq \alpha_{pq} \cdot x^{p-1} \cdot y^{q-1} \cdot \{qx(x-\xi) - py(y-\eta)\} = 0.$$

Es ist ferner:

$$\sigma = \int_a^x \sqrt{\frac{\left(\sum_0^n pq p \cdot \alpha_{pq} \cdot x^{p-1} \cdot y^q\right)^2 + \left(\sum_0^n pq q \cdot \alpha_{pq} \cdot x^p \cdot y^{q-1}\right)^2}{\sum_0^n pq q \cdot \alpha_{pq} \cdot x^p \cdot y^{q-1}}} \cdot dx.$$

Wir haben also zur Bestimmung der Gleichung der Wickelkurve die 5 Gleichungen:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_0^n pq \alpha_{pq} \cdot x^p y^q = 0, \quad (p+q \leq n), \\ (2) \sum_0^n pq \alpha_{pq} \cdot x^{p-1} \cdot y^{q-1} \cdot \{qx(x-\xi) - py(y-\eta)\} = 0, \\ (3) \sigma = \int_a^x \sqrt{\frac{\left(\sum_0^n pq p \cdot \alpha_{pq} \cdot x^{p-1} \cdot y^q\right)^2 + \left(\sum_0^n pq q \cdot \alpha_{pq} \cdot x^p \cdot y^{q-1}\right)^2}{\sum_0^n pq q \cdot \alpha_{pq} \cdot x^p \cdot y^{q-1}}} \cdot dx, \\ (4) \delta = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \\ (5) \Gamma(\sigma, \delta) = 0. \end{array} \right.$$

Lautet die Gleichung (5):

$$\delta = \gamma = \text{const.},$$

so ist die Wickelkurve eine „Parallelkurve“.¹⁾ Die Gleichung der Parallelkurven algebraischer Kurven stellt sich also allgemein dar durch Elimination von x und y aus den 3 Gleichungen:

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_0^n pq \alpha_{pq} \cdot x^p \cdot y^q = 0, \quad (p+q \leq n), \\ (2) \sum_0^n pq \alpha_{pq} \cdot x^{p-1} \cdot y^{q-1} \cdot \{qx(x-\xi) - py(y-\eta)\} = 0, \\ (3) \gamma = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \end{array} \right.$$

¹⁾ Ueber Parallelkurven und ihre Geschichte vergl. A. Ahrendt: „Untersuchungen über die Parallelfächen der Flächen 2. Grades.“ (Diss. Rostock 1888), pag. 3 ff. Vergl. ferner Loria: „Ebene Kurven“, VII. Abschn. 5. Kapitel.

Die Elimination wird im allgemeinen nicht möglich sein wegen der dabei auftretenden höheren Gleichungen.

Da γ durch eine Wurzel dargestellt ist, so besteht die Parallelkurve aus zwei Zweigen, einem inneren und einem äusseren.

Noch schwieriger als aus (II) die Gleichung der Parallelkurve zu berechnen, ist es natürlich, aus (I) allgemein die Gleichung der Wickelkurve zu berechnen; denn ausser auf Gleichungen höheren Grades stossen wir dort im allgemeinen auf ein Integral, das nicht auszuführen ist. Wir müssen unsere Untersuchungen daher auf die Fälle beschränken, wo die Elimination von x und y wirklich möglich und das Integral auszuwerten ist.

Die Gerade als Abszissenkurve.

§ 5. Die Gerade als Abszissenkurve im Normalenkoordinatensystem.

Die Formeln, welche wir hier erhalten, müssen diejenigen sein, welche die Transformation eines rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems auf irgendein anderes rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem ausdrücken. Die Gerade als Abszissenkurve bietet uns also nichts neues. Der Vollständigkeit und Kontrolle halber soll die Berechnung der Formeln hier aber doch ausgeführt werden.

Die Gerade, welche Abszissenkurve sein soll, habe die Gleichung:

$$A(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \beta,$$

Ferner ist:
$$y' = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

$$\sigma = \int_a^x \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} \cdot dx = \frac{(x - a) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta}.$$

Die Aufgabe ist also, σ und δ als Funktion von ξ und η darzustellen aus den 4 Gleichungen:

$$(1) \quad A(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

$$(2) \quad (x - \xi) \cdot \beta = (y - \eta) \cdot \alpha,$$

$$(3) \quad \sigma = \frac{(x-a) \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta},$$

$$(4) \quad \delta = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = (y-\eta) \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta}.$$

Aus (1) und (2) und (3) folgt, wenn wir die 3 Gleichungen homogen in x , y und 1 schreiben,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & -\alpha & -\beta\xi + \alpha\eta \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & 0 & -a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickeln wir nach der letzten Zeile, so ist:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \{ \beta(\alpha\eta - \beta\xi) + \alpha\gamma \} + (a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta\sigma)(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$- \beta^2\xi + \alpha\beta\eta + \alpha\gamma + a(\alpha^2 + \beta^2) + \beta\sigma \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0,$$

$$\sigma = - \frac{\alpha\gamma + \alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \xi - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \eta.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus (1) und (2) und (4):

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & -\alpha & -\beta\xi + \alpha\eta \\ 0 & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & -\eta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickeln wir nach der letzten Zeile, so ist:

$$-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \{ \alpha(\alpha\eta - \beta\xi) - \beta\gamma \} + (\eta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta\delta)(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$- \alpha^2\eta + \alpha\beta\xi + \beta\gamma + \eta(\alpha^2 + \beta^2) + \beta\delta \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0,$$

$$\delta = - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \xi - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \eta.$$

Die für σ und δ erhaltenen Formeln sind aber tatsächlich die Formeln, welche bei der Transformation eines rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems auf ein anderes rechtwinkliges cartesisches gelten,¹⁾ natürlich nur bis auf die Vorzeichen von σ und δ ; denn diese bleiben unbestimmt nach dem in § 2 darüber Gesagten.

§ 6. Die Gerade als Abszissenkurve im Strahlbüschelkoordinatensystem.

Nach der Definition, die wir in § 1 von den Zerrwickelkurven gegeben haben, müssen wir hier Geraden-Zerrwickelkurven er-

¹⁾ Vergl. Staude: „Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene.“ (Leipzig u. Berlin 1905), pag. 64 u. 65.

halten. Beachten wir aber die Definition, die wir in § 1 von der Zerrkurve einer Kurve Γ gegeben haben, so ist ohne weiteres klar, dass die Geraden-Zerrwickelkurven und die Geraden-Zerrkurven sich nicht durch ihre Gestalt unterscheiden können, sondern nur durch ihre Lage im Koordinatensystem.

Die Gleichung (1) des § 5 lautet in Polarkoordinaten:

$$A = r(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) + \gamma = 0,$$

so dass also

$$r = \frac{-\gamma}{\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi}, \quad r' = \frac{\gamma(\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi)}{(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^2}.$$

Hiermit ergibt sich:

$$\sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)} \cdot d\varphi,$$

was nach Ausführung des Integrals ergibt:

$$\sigma = \frac{\gamma \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)}{(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)(\alpha \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0)}.$$

Nach Formel (I, 3) des § 3 ergibt sich ferner:

$$\delta = \rho + \frac{\gamma}{\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi}.$$

Solange wir die Kurve Γ nicht spezialisieren, beeinträchtigen wir die Allgemeinheit unserer Untersuchung nicht, wenn wir der Geraden A eine spezielle Lage geben. Wir setzen daher:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1.$$

Dann wird:

$$A = y - \gamma = 0,$$

$$\sigma = \frac{\gamma \cdot \sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi \cdot \sin \varphi_0},$$

$$\delta = \rho - \frac{\gamma}{\sin \varphi}.$$

Ferner ist es, solange wir die Kurve Γ in der Ebene verschiebbar lassen, keine Spezialisierung, wenn wir φ_0 einen speziellen Wert beilegen. Wir wollen setzen:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2},$$

und erhalten, wenn wir die Richtung von σ umkehren, um die

Richtung der Abszissen Gerade gleichlaufend mit der Richtung der x-Achse zu machen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = +\gamma \cdot \cot \varphi, \\ \delta = \rho - \frac{\gamma}{\sin \varphi}. \end{array} \right.$$

Ist die zu transfigurierende Kurve eine algebraische:

$$\Gamma(x, y) = \sum_0^m \beta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0, \quad (\mu + \nu \leq m),$$

so hat die Geraden-Zerrkurve im Geraden-Strahlbüschelsystem die Gleichung:

$$\Gamma(\sigma, \delta) = \sum_0^m \beta_{\mu\nu} \sigma^\mu \delta^\nu = 0, \quad (\mu + \nu \leq m).$$

Setzen wir hierin die für σ und δ gefundenen Werte ein, so erhalten wir die Gleichung der Geraden-Zerrkurve in Polarkoordinaten:

$$\sum_0^m \beta_{\mu\nu} \gamma^\mu \cot^\mu \varphi \cdot \left(\rho - \frac{\gamma}{\sin \varphi} \right)^\nu = 0.$$

Führen wir cartesische Koordinaten ein, so lautet die Gleichung:

$$\sum_0^m \beta_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \cdot \left(\frac{y - \gamma}{y} \right)^\nu \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^\nu = 0,$$

oder, als Doppelsumme geschrieben:

$$\sum_0^m \mu \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \sum_0^m \nu \beta_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{y - \gamma}{y} \right)^\nu \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^\nu = 0.$$

Wenn wir die innere Summe in zwei Summen zerlegen, von denen die eine sich über die geraden, die andere über die ungeraden Zahlen ν erstreckt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_0^m \mu \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \sum_0^m 2\tau \beta_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{y - \gamma}{y} \right)^{2\tau} \cdot (x^2 + y^2)^\tau \\ = & - \sum_0^m \mu \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \sum_0^m 2\varepsilon + 1 \beta_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{y - \gamma}{y} \right)^{2\varepsilon + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^{2\varepsilon + 1}. \end{aligned}$$

Heben wir auf der rechten Seite $\sqrt{x^2 + y^2}$ aus der Doppelsumme heraus und quadrieren beide Seiten, so bekommen wir:

$$\left\{ \sum_0^m \mu \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \sum_0^m 2\tau \beta_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{y-\gamma}{y} \right)^{2\tau} \cdot (x^2 + y^2)^\tau \right\}^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 \left\{ \sum_0^m \mu \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \sum_0^m 2\varepsilon + 1 \beta_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{y-\gamma}{y} \right)^{2\varepsilon + 1} \cdot (x^2 + y^2)^\varepsilon \right\}^2.$$

Heben wir rechts noch $(y - \gamma)$ aus der Doppelsumme heraus und schreiben wieder in einfacher Summenform, so ist:

$$\left\{ \sum_0^m 2\tau \beta_{\mu, 2\tau} \cdot \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \cdot \left(\frac{y-\gamma}{y} \right)^{2\tau} \cdot (x^2 + y^2)^\tau \right\}^2$$

$$= (x^2 + y^2)(y - \gamma)^2 \cdot \left\{ \sum_0^m 2\varepsilon + 1 \beta_{\mu, 2\varepsilon + 1} \cdot \left(\frac{\gamma x}{y} \right)^\mu \cdot \frac{(y - \gamma)^{2\varepsilon}}{y^{2\varepsilon + 1}} \cdot (x^2 + y^2)^\varepsilon \right\}^2.$$

Multiplizieren wir schliesslich noch die Gleichung mit y^{2m} , so erhalten wir:

$$\left\{ \sum_0^m \mu, 2\tau \beta_{\mu, 2\tau} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot (y - \gamma)^{2\tau} \cdot y^{m - (\mu + 2\tau)} \cdot (x^2 + y^2)^\tau \right\}^2$$

$$= (x^2 + y^2)(y - \gamma)^2 \cdot \left\{ \sum_0^m \mu, 2\varepsilon + 1 \beta_{\mu, 2\varepsilon + 1} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot (y - \gamma)^{2\varepsilon} \cdot y^{m - (\mu + 2\varepsilon + 1)} \cdot (x^2 + y^2)^\varepsilon \right\}^2$$

(wobei $\mu + 2\tau \leq m$, $\mu + 2\varepsilon + 1 \leq m$).

Um die Ordnung der durch diese Gleichung dargestellten Kurve festzustellen, suchen wir die Glieder höchster Dimension auf. Unter der linken Summe beträgt die Dimension:

$$\mu + 2\tau + m - (\mu + 2\tau) + \tau \cdot 2 = m + \tau \cdot 2.$$

Um die obere Grenze dieser Zahl aufzufinden, beachten wir, dass τ von 0 bis $\left[\frac{m}{2} \right]$ läuft, wenn wir unter $\left[\frac{m}{2} \right]$ diejenige ganze Zahl verstehen, die am nächsten unter $\frac{m}{2}$ liegt, so dass also bei geradzahligem m :

$$\left[\frac{m}{2} \right] = \frac{m}{2}$$

und bei ungeradzahligem m :

$$\left[\frac{m}{2} \right] = \frac{m - 1}{2}.$$

Da τ die obere Grenze $\left[\frac{m}{2} \right]$ hat, so beträgt die obere Grenze

der Dimensionszahl unter der linken Summe unserer Gleichung:

$$m + 2 \cdot \left[\frac{m}{2} \right],$$

so dass also die linke Seite unserer Gleichung die Dimension hat:

$$2 \cdot \left(m + 2 \cdot \left[\frac{m}{2} \right] \right).$$

Die Summe auf der rechten Seite unserer Gleichung hat die Dimension:

$$\mu + 2\varepsilon + m - (\mu + 2\varepsilon + 1) + \varepsilon \cdot 2 = m - 1 + \varepsilon \cdot 2.$$

ε läuft von 0 bis $\left[\frac{m-1}{2} \right]$, so dass also die Dimension der betrachteten Summe beträgt:

$$m - 1 + 2 \cdot \left[\frac{m-1}{2} \right].$$

Die rechte Seite der Gleichung hat also die Dimension

$$2 + 2 + 2 \left(m - 1 + 2 \cdot \left[\frac{m-1}{2} \right] \right) = 2 \left(m + 1 + 2 \cdot \left[\frac{m-1}{2} \right] \right).$$

Die Ordnung der Kurve ist also so gross wie die grösste der beiden Zahlen

$$2\omega_1 = 2 \left(m + 2 \cdot \left[\frac{m}{2} \right] \right)$$

und

$$2\omega_2 = 2 \left(m + 1 + 2 \cdot \left[\frac{m-1}{2} \right] \right).$$

Sowohl bei geradem wie bei ungeradem m beträgt daher die Ordnung der Zerrkurve stets $4m$.

Um das Verhalten der Zerrkurven im Nullpunkt zu bestimmen, setzen wir

$$y = kx.$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum \beta_{\mu, 2\tau} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot (kx - \gamma)^{2\tau} \cdot (kx)^{m - (\mu + 2\tau)} \cdot x^{2\tau} \cdot (1 + k^2)^\tau \right\}^2 \\ &= x^2 (1 + k^2) (kx - \gamma)^2 \left\{ \sum \beta_{\mu, 2\varepsilon + 1} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot (kx - \gamma)^{2\varepsilon} \cdot (kx)^{m - (\mu + 2\varepsilon + 1)} \cdot x^{2\varepsilon} \cdot (1 + k^2)^\varepsilon \right\}^2. \end{aligned}$$

Da sich, wie ersichtlich, aus der ganzen Gleichung x^{2m} heraushebt, so ist der Koordinatenanfang stets $2m$ -facher Punkt der Zerrkurve.

Um das Verhalten im Unendlichen zu bestimmen, machen wir die Gleichung der Kurve zunächst homogen:

$$\left\{ \sum \beta_{\mu, 2\tau} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot (y - \gamma t)^{2\tau} \cdot y^{m - (\mu + 2\tau)} \cdot (x^2 + y^2)^\tau \cdot t^{\omega_1 - (2\tau + m)} \right\}^2$$

$$= (x^2 + y^2) (y - \gamma t)^2 \left\{ \sum \beta_{\mu, 2\varepsilon + 1} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot (y - \gamma t)^{2\varepsilon} \cdot y^{m - (\mu + 2\varepsilon + 1)} \cdot (x^2 + y^2)^\varepsilon \cdot t^{\omega_2 - (m + 2\varepsilon + 1)} \right\}^2$$

Wir müssen nun 2 Fälle unterscheiden:

1. m gerade.

In diesem Falle bekommt die ganze rechte Seite den Faktor $t^{2(\omega_1 - \omega_2)}$, da $\omega_1 > \omega_2$. Setzen wir nun $t = 0$, so verschwindet die rechte Seite. Auf der linken Seite bleiben ferner nur die Glieder, wo

$$m + 2\tau = \omega_1.$$

Es wird dann also, da $2\omega_1 = 4m$,

und für $t = 0$ wird daher: $\tau = \frac{m}{2}$,

$$\left\{ \sum \beta_{\mu, m} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot y^{m - \mu} \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \right\}^2 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^m \cdot \left\{ \sum \beta_{\mu, m} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot y^{m - \mu} \right\}^2 = 0.$$

2. m ungerade.

In diesem Falle verschwindet für $t = 0$ die linke Seite der Gleichung, da $\omega_2 > \omega_1$. Von der rechten Seite bleiben nur die Glieder, wo

$$m + 2\varepsilon + 1 = \omega_2,$$

also $\varepsilon = \frac{m - 1}{2}$.

Es wird also für $t = 0$:

$$(x^2 + y^2)^m \cdot \left\{ \sum \beta_{\mu, m} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot y^{m - \mu} \right\}^2 = 0$$

oder, da bei ungeradem m das μ nur von 0 bis $m - 1$ laufen kann:

$$(x^2 + y^2)^m \cdot y^2 \cdot \left\{ \sum \beta_{\mu, m} \cdot (\gamma x)^\mu \cdot y^{m - 1 - \mu} \right\}^2 = 0.$$

Die Zerrkurven sind also stets, sowohl wenn m gerade als wenn m ungerade ist, m-fach zirkulare Kurven. Ist m ungerade, so sind ferner mindestens zwei Asymptoten der x-Achse parallel.

m = 1. Die Geraden-Zerrgeraden.

Aus der allgemeinen Gleichung der Geraden-Zerrkurven erhalten wir für $m = 1$ die Gleichung der Zerrgeraden:

$$(\beta_{00} y + \beta_{10} \gamma x)^2 = \beta_{01}^2 (x^2 + y^2) (y - \gamma)^2.$$

Diese ist die Geraden-Zerrwickelkurve der Geraden

$$\beta_{00} + \beta_{10}x + \beta_{01}y = 0.$$

Schreiben wir letztere Gleichung in der Form

$$y = mx + b,$$

so bedeutet $m = -\frac{\beta_{10}}{\beta_{01}}$ die Tangente des Winkels, den die Gerade mit der x -Achse bildet. $b = -\frac{\beta_{00}}{\beta_{01}}$ bedeutet den Abschnitt, den die Gerade auf der y -Achse macht.

Mit der neuen Bezeichnung lautet die Gleichung der Zerrkurve:

$$(by + m\gamma x)^2 = (x^2 + y^2)(y - \gamma)^2.$$

Im Nullpunkt hat die Kurve einen Doppelpunkt mit den Tangenten:

$$(by + m\gamma x)^2 = \gamma^2(x^2 + y^2).$$

Um diese einzeln zu bestimmen, müssen wir setzen:

$$y = kx$$

und erhalten zur Bestimmung von k die Gleichung:

$$(bk + m\gamma)^2 = \gamma^2(1 + k^2),$$

$$k^2(b^2 - \gamma^2) + 2bm\gamma \cdot k + \gamma^2(m^2 - 1) = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung beträgt:

$$D = b^2m^2\gamma^2 - (b^2 - \gamma^2)\gamma^2(m^2 - 1)$$

$$= \gamma^2(b^2 + \gamma^2(m^2 - 1)).$$

Die Tangenten sind also reell und verschieden, imaginär, oder reell und gleich, je nachdem $D \geq 0$. Daher ist der Nullpunkt einfacher Doppelpunkt, isolierter Punkt, oder Spitze der Kurve, je nachdem

$$b^2 + \gamma^2(m^2 - 1) \geq 0,$$

oder, in anderer Form geschrieben:

$$m^2 \geq 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}.$$

Wir bekommen also für das Verhalten der Kurve im Nullpunkt folgende Tabelle:

	$b > \gamma$	$b \leq \gamma$
Gew. Doppelpunkt	stets	$m^2 > 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}$
Spitze	—	$m^2 = 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}$
Isolierter Punkt	—	$m^2 < 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}$

Die Gerade $y = \gamma$ schneidet die Kurve in dem Punkte

$$y_0 = \gamma, \quad x_0 = -\frac{b}{m}.$$

Dieser Punkt ist Doppelpunkt der Kurve; denn setzen wir

$$\eta = y + \gamma, \\ \xi = x - \frac{b}{m},$$

so lautet die Gleichung der Kurve:

$$(b\eta + m\gamma\xi)^2 = [(\xi - bm)^2 + (\eta + \gamma)^2] \cdot \eta^2.$$

Die Tangenten in dem neuen Koordinatenanfang bestimmen sich aus:

$$(b\eta + m\gamma\xi)^2 = (b^2m^2 + \gamma^2) \eta^2.$$

Setzen wir

$$\eta = x\xi,$$

so ergibt sich zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$(bx + m\gamma)^2 = (b^2m^2 + \gamma^2) x^2, \\ x^2(b^2 - b^2m^2 - \gamma^2) + 2bm\gamma x + m^2\gamma^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung,

$$D = b^2m^2\gamma^2 - m^2\gamma^2(b^2 - b^2m^2 - \gamma^2) \\ = m^2\gamma^2(b^2m^2 + \gamma^2),$$

ist stets > 0 ; der betrachtete Punkt ist also stets gewöhnlicher Doppelpunkt. Nur wenn $m = 0$, so ist $D = 0$, und der betrachtete Punkt ist entweder eine Spitze oder ein Binodialpunkt. In unserm Falle ist der Punkt ein Binodialpunkt, da in der für $m = 0$ entstehenden Kurvengleichung

$$b^2\eta^2 = [\xi^2 + (\eta + \gamma)^2] \eta^2$$

η auch in den Gliedern dritter Potenz enthalten ist. Im Falle

$m = 0$ liegt der betrachtete Punkt im Unendlichen; denn seine Koordinaten waren

$$y_0 = \gamma, \quad x_0 = -\frac{b}{m} = -\infty.$$

Im Falle $m = 0$ ist also der ∞ ferne Punkt der x -Achse Binodialpunkt.

Um auch in den übrigen Fällen das Verhalten der Kurve im Unendlichen zu untersuchen, machen wir ihre Gleichung homogen:

$$(b\gamma + m\gamma x)^2 t^2 = (x^2 + y^2)(y - \gamma t)^2.$$

Für $t = 0$ ergibt sich:

$$(x^2 + y^2)y^2 = 0.$$

D. h.: Die ∞ ferne Gerade schneidet die Kurve in den imaginären Kreispunkten, wie wir schon wissen, und sie hat auf der x -Achse zwei Punkte mit der Kurve gemeinsam. Um die Natur derselben zu untersuchen, setzen wir

$$y = \alpha t$$

und erhalten aus der Kurvengleichung:

$$(b\alpha t + m\gamma x)^2 t^2 = (x^2 + \alpha^2 t^2)(\alpha - \gamma t)^2.$$

D. h.: Jede Parallele zur x -Achse schneidet die Kurve im Unendlichen in zwei Punkten.

Der ∞ ferne Punkt der x -Achse ist also stets gewöhnlicher Doppelpunkt der Kurve. Nur im Falle $m = 0$ war er, wie wir gesehen hatten, ein Binodialpunkt.

Ausser für $m = 0$ tritt noch für $m^2 = 1$ eine Merkwürdigkeit ein. In diesem Falle lautet nämlich die Gleichung der Kurve:

$$(b\gamma \pm \gamma x)^2 = (x^2 + y^2)(y - \gamma)^2,$$

oder, wenn wir ausmultiplizieren:

$$b^2 y^2 \pm 2b\gamma xy + \gamma^2 x^2 = (x^2 + y^2)(y^2 - 2\gamma y) + \gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2,$$

$$(b^2 - \gamma^2)y^2 \pm 2b\gamma xy - y(x^2 + y^2)(y - 2\gamma) = 0.$$

Die C^4 zerfällt also in die C^3

$$(x^2 + y^2)(y - 2\gamma) - (b^2 - \gamma^2)y \pm 2b\gamma x = 0$$

und die x -Achse $y = 0$.

Die C^3 geht durch den Nullpunkt und hat einen Doppelpunkt bei $y_0 = \gamma, \quad x_0 = -b.$

Alle Geraden-Zerrgeraden sind Kurven vom Geschlecht Null, da sie die Maximalzahl von Doppelpunkten haben. Da es solche mit Spitze und solche ohne Spitze gibt, so gliedern sie sich in

zwei Abteilungen, für welche beziehungsweise die Plücker'schen Zahlen¹⁾ die Werte annehmen:

a) $\mu = 4 \quad \delta = 3 \quad \alpha = 0 \quad \nu = 6 \quad \iota = 6 \quad \tau = 4 \quad p = 0$

b) $\mu = 4 \quad \delta = 2 \quad \alpha = 1 \quad \nu = 5 \quad \iota = 4 \quad \tau = 2 \quad p = 0$

Für die zerfallenden Kurven lauten die Plücker'schen Zahlen:

c) $\mu = 3 \quad \delta = 1 \quad \alpha = 0 \quad \nu = 4 \quad \iota = 3 \quad \tau = 0 \quad p = 0$

Um die Kurven zeichnen zu können, ist es noch wichtig, die Asymptoten zu kennen. Da, wie wir wissen, diese der x-Achse parallel sind, so setzen wir

$$y = c$$

in die Kurvengleichung ein und erhalten:

$$(bc + m\gamma x)^2 = (x^2 + c^2)(c - \gamma)^2.$$

c bestimmt sich also aus:

$$m^2\gamma^2 = (c - \gamma)^2$$

und beträgt also:

$$c = \gamma(1 \pm m),$$

so dass die Gleichungen der Asymptoten lauten:

$$y = \gamma(1 \pm m).$$

Die typischen Formen der Geraden-Zerrgeraden sind auf Tafel 13 gezeichnet. Fig. 1 zeigt den Fall $b > \gamma$, Fig. 2 den Fall $m^2 > 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}$, Fig. 3 den Fall $m^2 = 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}$ und Fig. 4 den Fall $m^2 < 1 - \frac{b^2}{\gamma^2}$. Fig. 5 endlich zeigt den Fall, wo die Kurve in eine C^3 und die x-Achse zerfällt, wo also $m^2 = 1$.

Spezialfälle der Geraden-Zerrgeraden sind die Konchoiden des Nikomedes. Wir erhalten sie für $m = 0$.

Wir wollen nun die Geraden-Zerrkurven noch unter einem anderen Gesichtspunkte betrachten. Die Kurve, welche man erhält, indem man die Radiusvectoren der Kurven $C_1 C_2 \dots C_\nu$ addiert, wollen wir die „Additionskurve aus den Kurven $C_1 C_2 \dots C_\nu$ “

1) Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven“. (Leipzig 1873), pag. 75, 154 und 261.

nennen.¹⁾ Stellen wir die Gleichung der Geraden-Zerrgeraden in Polarkoordinaten dar, so erhalten wir:

$$r = \pm b + \frac{\gamma}{\sin \varphi} \pm m\gamma \cot \varphi.$$

Nun stellt

$$r = \pm b$$

einen Kreis,

$$r = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$$

eine Parallele zur x-Achse im Abstände γ ,

$$r = \pm m\gamma \cot \varphi$$

eine Kappakurve dar, deren Achse die x-Achse ist und deren Binodiantangente die y-Achse bildet.

Die Geraden-Zerrgerade ist demnach die Additionskurve

Kreis + Gerade + Kappakurve.

Man nennt nun die Additionskurve

C + Kreis

eine C-Konchoide, und speziell die Additionskurve

Gerade + Kreis

die Konchoide des Nikomedes.

Die Geraden-Zerrgeraden können also auch aufgefasst werden als die Additionskurven:

1. der Konchoide des Nikomedes mit der Kappakurve,
2. der Kappakonchoide mit der Geraden $y = \gamma$,
3. als Konchoide der Additionskurve Gerade + Kappakurve.

Spezialfälle der Geraden-Zerrgerade sind demnach:

1. die Gerade. Wir erhalten sie für $m = 0$, $b = 0$,
2. der Kreis. Wir erhalten ihn für $\gamma = 0$,
3. die Konchoide des Nikomedes.²⁾ Wir erhalten sie für $m = 0$,

¹⁾ Eine Anwendung dieser Methode findet sich bei G. Eggers: „Ueber gewisse mit den Kegelschnitten zusammenhängende ebene Kurven höherer Ordnung.“ (Diss. Halle 1911.) Vergl. ferner: Wieleitner: „Spezielle ebene Kurven“, pag. 3. (Sammlung Schubert LVI.) Rolle: „Ueber einige von den Kegelschnitten abgeleitete Kurven höheren Grades.“ (Schulprogr. Ilmenau 1909.)

²⁾ Die drei verschiedenen Formen, welche die Konchoide des Nikomedes für $b \geq \gamma$ annimmt, finden sich gezeichnet z. B. bei Loria: „Ebene Kurven“, Tafel IV, Fig. 27.

4. die Additionskurve der Geraden $r = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$ mit der Kappa-kurve $r = m \cdot \gamma \cdot \cot \varphi$. Wir erhalten dieselbe für $b = 0$. In cartesischen Koordinaten hat diese Kurve die Gleichung:

$$(y - \gamma)^2 (x^2 + y^2) = m^2 \gamma^2 x^2.$$

Die Fälle, welche nach der Tabelle pag. 17 möglich sind, sind auf Tafel 14 dargestellt. Fig. 1 zeigt den Fall $m^2 > 1$, Fig. 2 den Fall $m^2 < 1$, Fig. 3 den Fall $m^2 = 1$. Nach dem auf pag. 18 Gesagten zerfällt die Kurve in diesem Falle in eine C^3 und die x-Achse. Den Fall, wo der Koordinatenanfang Spitze der Kurve ist, gibt es daher bei der betrachteten Kurve nicht.

Die Kappakurve ist kein Spezialfall der Geraden-Zerrgerade, weil in der Gleichung

$$r = \pm b + \frac{\gamma}{\sin \varphi} \pm m \gamma \cot \varphi$$

der Summand $\frac{\gamma}{\sin \varphi}$ nur für $\gamma = 0$ verschwindet, dann aber gleichzeitig auch der Summand $m \gamma \cot \varphi$ verschwindet.

m = 2. Die Geraden-Zerrkegelschnitte.

Als Gleichung derselben ergibt sich aus der Formel pag. 13:

$$\begin{aligned} & \{ \beta_{00} y^2 + \beta_{02} (y - \gamma)^2 (x^2 + y^2) + \beta_{10} \gamma xy + \beta_{20} \gamma^2 x^2 \}^2 \\ & = (x^2 + y^2) (y - \gamma)^2 (\beta_{01} y + \beta_{11} \gamma x)^2. \end{aligned}$$

Der erzeugende Kegelschnitt hat die Gleichung:

$$\beta_{20} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{02} y^2 + \beta_{10} x + \beta_{01} y + \beta_{00} = 0.$$

Geben wir diese in der allgemein üblichen Form:

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0,$$

so hat unsere Geraden-Zerrkurve die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \{ a_{33} y^2 + a_{22} (y - \gamma)^2 (x^2 + y^2) + 2a_{13} \gamma xy + a_{11} \gamma^2 x^2 \}^2 \\ & = 4 (x^2 + y^2) (y - \gamma)^2 (a_{23} y + a_{12} \gamma x)^2. \end{aligned}$$

Die Geraden-Zerrkegelschnitte sind im allgemeinen Kurven achter Ordnung. Wir wollen diese hier nicht allgemein untersuchen, sondern nur einige Fälle herausgreifen, wo die Kurven sich auf Kurven niedrigeren Grades reduzieren. Dies tritt z. B. ein, für:

1. $a_{22} = 0$.

In diesem Falle stellt der erzeugende Kegelschnitt

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

eine Hyperbel dar, deren eine Asymptote der y -Achse parallel ist. Die zugehörige Zerrkurve hat die Gleichung:

$$(a_{33}y^2 + 2a_{13}\gamma xy + a_{11}\gamma^2x^2)^2 = 4(x^2 + y^2)(y - \gamma)^2(a_{23}y + a_{12}\gamma x)^2,$$

stellt also eine C^6 dar. Die Asymptoten derselben sind den Geraden

$$y = 0$$

und

$$a_{23}y + a_{12}\gamma x = 0$$

parallel.

Setzen wir $y = c$ in die Kurvengleichung ein und setzen das Aggregat der Glieder, in denen x in der höchsten Potenz vorkommt, gleich Null, so erhalten wir zur Bestimmung von c die Gleichung:

$$a_{11}^2\gamma^4x^4 = 4(c - \gamma)^2 \cdot a_{12}^2 \cdot \gamma^2x^4,$$

woraus folgt:

$$c = \gamma \left(1 \pm \frac{a_{11}}{2a_{12}} \right).$$

Das erste Asymptotenpaar hat also die Gleichung:

$$y = \gamma \left(1 \pm \frac{a_{11}}{2a_{12}} \right).$$

Zur Bestimmung des zweiten Paares setzen wir:

$$a_{23}y + a_{12}\gamma x = c$$

und setzen

$$y = \frac{c - a_{12}\gamma x}{a_{23}}$$

in die Gleichung der Kurve ein. Wir erhalten dann zur Bestimmung von c die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \left(a_{33} \frac{a_{12}^2\gamma^2x^2}{a_{23}^2} - 2a_{13}\gamma \frac{a_{12}\gamma x^2}{a_{23}} + a_{11}\gamma^2x^2 \right)^2 \\ & = 4 \left(x^2 + \frac{a_{12}^2\gamma^2x^2}{a_{23}^2} \right) \cdot \frac{a_{12}^2\gamma^2x^2}{a_{23}^2} \cdot c^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{33}a_{12}^2 - 2a_{13}a_{12}a_{23} + a_{11}a_{23}^2}{a_{23}^2} \right)^2 = 4 \cdot \frac{a_{23}^2 + a_{12}^2\gamma^2}{a_{23}^4} \cdot a_{12}^2 \cdot c^2, \\ c = & \frac{\pm (a_{33}a_{12}^2 - 2a_{13}a_{12}a_{23} + a_{11}a_{23}^2)}{2a_{12}\sqrt{a_{23}^2 + a_{12}^2\gamma^2}} = \frac{\pm \Delta}{2a_{12}\sqrt{a_{23}^2 + a_{12}^2\gamma^2}}, \end{aligned}$$

wobei wir unter Δ die Determinante unseres Kegelschnittes verstehen.

Das zweite Asymptotenpaar hat also die Gleichung:

$$a_{23}y + a_{12}\gamma x = \frac{\pm \Delta}{2a_{12}\sqrt{a_{23}^2 + a_{12}^2\gamma^2}}.$$

Wir können nun leicht das Geschlecht unserer Kurve bestimmen. Da der Koordinatenanfang vierfacher Kurvenpunkt ist, so entspricht er 6 Doppelpunkten. Im Unendlichen hat die Kurve in der Richtung der beiden Asymptotenpaare je einen Doppelpunkt. Im Endlichen hat die Kurve ferner noch je einen Doppelpunkt in den beiden Schnittpunkten der Geraden $y = \gamma$ mit der um die Strecke $+\gamma$ parallel zur y -Achse verschobenen erzeugenden Hyperbel, wie sofort aus der Konstruktion klar ist. Die Anzahl der Doppelpunkte ist also $6 + 2 + 2 = 10$. Dies ist aber für eine C^6 gerade die Maximalzahl. Unsere Kurve hat daher das Geschlecht $p = 0$.

Der Verlauf der Kurve ist auf Tafel 15, Fig. 1 dargestellt und zwar für denjenigen Fall, wo die Kurve im Anfangspunkt zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten hat.

Ist ausser $a_{22} = 0$ auch noch $a_{12} = 0$, so ist der erzeugende Kegelschnitt die Parabel:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

also eine Parabel, deren Hauptachse der y -Achse parallel ist. Die zugehörige Zerrkurve hat die Gleichung:

$$(a_{33}y^2 + 2a_{13}\gamma xy + a_{11}\gamma^2x^2)^2 = 4(x^2 + y^2)(y - \gamma)^2 \cdot a_{23}^2y^2.$$

Sie hat im Koordinatenanfang einen 4fachen Punkt, ferner im Endlichen noch zwei weitere Doppelpunkte, ebenso wie die zuletzt betrachtete Hyperbel. Die ∞ ferne Gerade ist Binodialtangente der Kurve im ∞ fernen Punkte der x -Achse.

Die Kurve hat daher $6 + 2 + 2 = 10$ Doppelpunkte, ist also auch vom Geschlecht $p = 0$. Der Verlauf der Kurve ist auf Tafel 15, Fig. 2 gezeichnet. Die Kurve besitzt keine Asymptoten.

2. $a_{11} = -a_{22}$; $a_{12} = 0$.

In diesem Falle ist der erzeugende Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel sind. Die Zerrkurve zerfällt in die Doppelgerade $y = 0$ und die C^6

$$\begin{aligned} \{ a_{33}y + a_{22}(y - 2\gamma)(x^2 + y^2) + a_{22}\gamma^2y + 2a_{13}\gamma x \}^2 \\ = 4a_{23}^2(x^2 + y^2)(y - \gamma)^2. \end{aligned}$$

Diese hat die Gerade $y = 2\gamma$ als Asymptote und zeigt den Verlauf, der auf Tafel 15, Fig. 3 angegeben ist.

3. $a_{12} = 0$; $a_{23} = 0$.

Der erzeugende Kegelschnitt hat die Gleichung:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{33} = 0.$$

Die eine Achse desselben ist also die x -Achse.

Die zugehörige Zerrkurve ist eine C^4 von der Gleichung:

$$a_{33}y^2 + a_{22}(y - \gamma)^2(x^2 + y^2) + 2a_{13}\gamma xy + a_{11}\gamma^2x^2 = 0.$$

Diese hat einen Doppelpunkt im Koordinatenanfang und einen zweiten im Unendlichen in der Richtung der Geraden $y = \gamma$, welche Asymptote ist, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist (Tafel 16, Fig. 3). Ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, so sind die Asymptoten die Geraden:

$$y = \gamma \left(1 \pm \sqrt{\frac{-a_{11}}{a_{22}}} \right).$$

Tafel 16, Fig. 1, 2 zeigt den Verlauf der Kurve, wenn der erzeugende Kegelschnitt eine Hyperbel ist, Fig. 3, wenn sie eine Parabel ($a_{11} = 0$), Fig. 4, wenn sie eine Ellipse ist.

Ist der erzeugende Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, deren eine Achse mit der x -Achse zusammenfällt, ist also ausser $a_{12} = 0$, $a_{23} = 0$ noch $a_{11} = -a_{22}$, so zerfällt die Zerrkurve in die Gerade $y = 0$ und die C^3 .

$$a_{33}y + a_{22}(y - 2\gamma)(x^2 + y^2) + a_{22}\gamma^2y + 2a_{13}\gamma x = 0,$$

deren Verlauf auf Tafel 16, Fig. 5 dargestellt ist. Die Kurve geht aus der auf Tafel 15, Fig. 3 gezeichneten hervor, indem die beiden Ovale und ebenso die sich ins Unendliche erstreckenden Züge zusammenfallen.

Die Kegelschnitte als Abszissenkurven.

§ 7. Die Kegelschnitte als Abszissenkurven im Normalenkoordinatensystem.

Die Gestalt der Wickelkurven, welche wir hier erhalten, ist ganz unabhängig von der Lage der Abszissenkurve, da einer Drehung oder Verschiebung derselben auch eine Drehung oder Verschiebung der Wickelkurve entspricht. Wir können daher die Gleichung des Kegelschnitts in Mittelpunktskoordinaten zugrunde

legen. Trotzdem aber wird die Elimination von x und y recht schwierig, und bei der Ellipse und Hyperbel wird das Integral für σ ein elliptisches.

Auch für die Parabel ist die Elimination noch mit der Lösung einer Gleichung 3. Grades verknüpft. Wir wollen diesen Fall betrachten. Die Parabel

$$A = y^2 - 2px = 0$$

sei Abszissenkurve. Dann ist

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -2p, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 2y,$$

also:

$$\sigma = \int_a^x \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} \cdot dx = \int_a^x \sqrt{\frac{p + 2x}{2x}} \cdot dx,$$

was nach Ausführung des Integrals ergibt:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2x(p + 2x)} - \sqrt{2a(p + 2a)} + p \cdot \log \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{2a} + \sqrt{p + 2a}} \right).$$

Zur Bestimmung der Gleichung der Parabel-Wickelkurve der Kurve Γ haben wir also die 5 Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad y^2 - 2px = 0, \\ (2) \quad (x - \xi)y + (y - \eta)p = 0, \\ (3) \quad \sigma = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2x(p + 2x)} - \sqrt{2a(p + 2a)} + p \cdot \log \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p + 2x}}{\sqrt{2a} + \sqrt{p + 2a}} \right), \\ (4) \quad \delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \\ (5) \quad \Gamma(\sigma, \delta) = 0. \end{array} \right.$$

Eliminiert man x aus (1) und (2), so erhält man:

$$\begin{aligned} y^3 - 2p(\xi - p)y - 2p^2\eta &= 0, \\ y &= \sqrt[3]{p^2\eta + p\sqrt{p^2\eta^2 + \frac{8}{27}p(p - \xi)^3}} \\ &\quad + \sqrt[3]{p^2\eta - p\sqrt{p^2\eta^2 + \frac{8}{27}p(p - \xi)^3}}. \end{aligned}$$

x würde sich dann etwa berechnen aus (1):

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Wir sind somit imstande, σ und δ als Funktion von ξ und η darzustellen, können nun also die Gleichung jeder Parabel-

Wickelkurve aufstellen. Diese Kurven sind alle transzendent, da δ eine algebraische und σ eine transzendente Funktion ist. Nur wenn σ gar nicht in der Funktion Γ vorkommt, so ist die Wickelkurve algebraisch. Wenn aber σ nicht in Γ vorkommt, so ist:

$$\Gamma = \delta - \gamma = 0.$$

Die Gleichung der Parallelkurve der Parabel berechnet sich also aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ (x - \xi)y + (y - \eta)p = 0, \\ \gamma = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{cases}$$

Ganz analog würde sich die Gleichung der Parallelkurve der Ellipse ergeben aus:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \frac{(x - \xi)y}{b^2} - \frac{(y - \eta)x}{a^2} = 0, \\ \gamma = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{cases}$$

und die der Hyperbel aus:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \frac{(x - \xi)y}{b^2} + \frac{(y - \eta)x}{a^2} = 0, \\ \gamma = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{cases}$$

Die Parallelkurven der Kegelschnitte, welche Breton¹⁾ Toroïden genannt hat, sind untersucht von Cayley²⁾ und Roberts³⁾. Sie sind Kurven 8. Ordnung.

§ 8. Die Kegelschnitte als Abszissenkurven im Strahlbüschelkoordinatensystem.

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, wo der als Abszissenkurve dienende Kegelschnitt in Mittelpunktskoordinaten gegeben ist. Nur den Kreis wollen wir allgemeiner betrachten.

¹⁾ Nouvelles Annales de Mathématiques, Tome III, 1844. Hier wird nur die Toroïde der Ellipse behandelt.

²⁾ Quarterly Journal XI.

³⁾ Quarterly Journal XII.

I. Ellipse und Hyperbel als Abszissenkurve.

Aus:

$$(1) \quad A = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \pm \frac{2y}{b^2}.$$

Folglich wird:

$$(2) \quad \sigma = \frac{1}{a} \int_a^x \sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} \cdot dx,$$

wo

$$e^2 = a^2 \mp b^2.$$

Ferner berechnet sich:

$$(3) \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2}}}, \quad x = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2}}}$$

und hiermit:

$$(4) \quad \delta = \frac{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2}} - 1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2}}} \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Wir können das elliptische Integral (2) durch Reihenentwicklung integrieren und dann durch (3) σ als Funktion von ξ und η darstellen. Dann sind wir imstande, die Gleichungen der Zerrwickelkurven auf der Ellipse und Hyperbel anzugeben. Sie sind alle transzendent, da σ transzendent ist. Nur wenn σ in der Funktion Γ nicht vorkommt, so sind sie algebraisch. Dann ist aber:

$$\Gamma = \delta - \gamma = 0,$$

und wir erhalten die Mittelpunktskonchoiden der Ellipse und Hyperbel:

$$4 \left(\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2} \right) (\xi^2 + \eta^2)^2 = \left[\xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{\xi^2}{a^2} \pm \frac{\eta^2}{b^2} \right) (\xi^2 + \eta^2 - \gamma^2) \right]^2.$$

Ebenso wie die Parallelkurven sind diese auch Kurven 8. Ordnung.

II. Die Parabel als Abszissenkurve.

$$(1) \quad A = y^2 - 2px = 0.$$

Es ist nach § 7 (3):

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2x(p+2x)} - \sqrt{2a(p+2a)} + p \cdot \log \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p+2x}}{\sqrt{2a} + \sqrt{p+2a}} \right)$$

Mit der Beziehung

$$\xi : \eta = x : y$$

folgt aus (1):

$$(2) \quad y = 2p \cdot \frac{\xi}{\eta}, \quad x = 2p \cdot \frac{\xi^2}{\eta^2},$$

und hiermit:

$$\delta = \frac{\eta^2 - 2p\xi}{\eta^2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Ferner ergibt sich mit (2):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p\xi}{\eta^2} \sqrt{4\xi^2 + \eta^2} - \frac{1}{2} \sqrt{2a(p+2a)} + \frac{p}{2} \cdot \log \frac{2\xi + \sqrt{4\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{2a} + \sqrt{p+2a}} \\ &\quad + \frac{p}{4} \log p - \frac{p}{2} \log \eta. \end{aligned}$$

Wir können nunmehr die Gleichungen aller Zerrwickelkurven auf der Parabel (1) angeben. Sie sind alle transzendent, da σ transzendent. Nur wenn

$$\Gamma = \sigma - \gamma = 0$$

ist, so sind sie algebraisch. Wir erhalten dann die Scheitelkonchoide der Parabel, eine C^6 mit der Gleichung:

$$\gamma^2 \eta^4 = (\eta^2 - 2p\xi)^2 (\xi^2 + \eta^2).$$

III. Der Kreis als Abszissenkurve.

Ohne zu spezialisieren, können wir den Kreis

$$A = (x-c)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

als Abszissenkurve nehmen. In Polarkoordinaten lautet seine Gleichung:

$$r^2 - 2rc \cos \varphi - a^2 + c^2 = 0$$

und es ergibt sich:

$$\sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi = a \cdot \left[\varphi + \arcsin \left(\frac{c}{a} \sin \varphi \right) \right],$$

wobei wir dahin spezialisiert haben, dass wir $\varphi_0 = 0$ setzten.

Es ergibt sich ferner:

$$\delta = \rho - r = \rho - (c \cos \varphi + \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi}).$$

Die Kreis-Zerrwickelkurve der Kurve Γ ist demnach:

$$\Gamma \left(a \cdot \left[\varphi + \arcsin \left(\frac{c}{a} \sin \varphi \right) \right], \left[\rho - c \cdot \cos \varphi - \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi} \right] \right) = 0.$$

Hierbei sind $\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi}$ und $\arcsin \left(\frac{c}{a} \sin \varphi \right)$ nur dann reell, wenn

$$\left| \sin \varphi \right| \leq \left| \frac{a}{c} \right|.$$

Diese Bedingung ist stets erfüllt, wenn

$$|a| \geq |c|,$$

wenn also der Scheitel des Strahlbüschels innerhalb des Abszissenkreises oder auf seinem Umfange liegt. In diesem Falle gehören also zu jedem φ reelle Kurvenpunkte.

Ist aber

$$|a| < |c|,$$

so gehören nur zu solchen Werten von φ reelle Kurvenpunkte, für welche

$$\left| \sin \varphi \right| \leq \left| \frac{a}{c} \right|.$$

Im Grenzfall ist

$$\pm \sin \varphi = \frac{a}{c};$$

D. h.: Die Kurve verläuft ganz zwischen den beiden Tangenten, die man von dem Zerrpunkt an den Abszissenkreis legen kann.

Die Kreis-Zerrwickelkurve der Geraden

$$y - \alpha x - b = 0$$

z. B. ist:

$$\rho = c \cdot \cos \varphi + \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \varphi} + \alpha x \cdot \left[\varphi + \arcsin \left(\frac{c}{a} \sin \varphi \right) \right] + b.$$

Diese Kurve verläuft also ganz zwischen den beiden Geraden:

$$\varphi = \pm \arcsin \frac{a}{c},$$

und zwar sind diese beiden Geraden Tangenten der Kurve; denn für $\pm \sin \varphi = \frac{a}{c}$ verschwindet in ρ die Quadratwurzel. Auf den beiden Geraden fallen also zwei Werte ρ zusammen. Da ρ wegen des auftretenden arcsin vieldeutig ist um $2h\pi \cdot \alpha x$, so berühren die beiden Geraden die Kurve ∞ oft.

Anders ist es, wenn $|a| > |c|$. Dann gehören zu jedem Werte φ unendlich viele Werte ρ . In diesem Falle erhalten wir daher Kurven, die sich spiralförmig um den Abszissenkreis herumwinden.

Für $a = \pm c$, $\alpha = 0$ erhalten wir die Pascalsche Schnecke:

$$(x^2 + y^2 - 2cx) = (x^2 + y^2) \cdot b^2.$$

Die Kreiswickelkurven.

§ 9. Die Kreiswickelkurven algebraischer Kurven.

Die Kreiswickelkurven sind ein Spezialfall der Kreis-Zerrwickelkurven; denn man kann sie auffassen als Zerrwickelkurven, deren Zerrpunkt mit dem Mittelpunkt des Abszissenkreises zusammenfällt. Wir erhalten daher ihre Gleichung, wenn wir in den Formeln für die Zerrwickelkurven $c = 0$ setzen. Die Gleichung der Kreiswickelkurve der Kurve

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

lautet daher:

$$f(a\varphi, \rho - a) = 0.$$

Ist (1) eine algebraische Kurve:

$$\sum_{\substack{p+q \leq n \\ p, q \geq 0}} \alpha_{pq} x^p y^q = 0, \quad (p + q \leq n),$$

so lautet also die Gleichung der Kreiswickelkurve:

$$\sum_{\substack{p+q \leq n \\ p, q \geq 0}} \alpha_{pq} (a\varphi)^p \cdot (\rho - a)^q = 0,$$

oder, wenn wir $(\rho - a)^q$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln:

$$\sum_{\substack{p+q \leq n \\ p, q \geq 0}} \alpha_{pq} (a\varphi)^p \cdot \sum_{\substack{m \leq q \\ m \geq 0}} \binom{q}{m} (-a)^m \cdot \rho^{q-m} = 0,$$

$$\sum_{\substack{m \leq n \\ m \geq 0}} \sum_{\substack{p+q \leq n \\ p, q \geq 0}} \alpha_{pq} \cdot (-1)^m \cdot \binom{q}{m} \cdot a^{m+p} \cdot \varphi^p \cdot \rho^{q-m} = 0.$$

Die Kreiswickelkurven sind Konchoiden derjenigen Kurven, die man bei Transfiguration von rechtwinkligen cartesischen auf Polarkoordinaten erhält.¹⁾

¹⁾ Die letzteren Kurven sind zuerst untersucht von Varignon („Nouvelle formation de spirales etc.“).

Vergl. dazu Loria: „Ebene Kurven“, pag. 595.

Die Kreiswickelkurve der Geraden

$$y - \alpha x - b = 0$$

ist z. B.:

$$\rho = a + b + \alpha \alpha \varphi = \alpha \alpha \left(\varphi + \frac{a+b}{\alpha \alpha} \right),$$

also eine Archimedische Spirale.

Auf die Kreiswickelkurven der algebraischen Kurven wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern uns gleich zu den Kreiswickelkurven der trigonometrischen Linien wenden.

§ 10. Die Kreiswickelkurven der trigonometrischen Linien.

Die Gleichung der trigonometrischen Linien ist in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten:

$$y - r \cdot \Theta \left(\frac{x}{r} \right) = 0,$$

wo Θ eine trigonometrische Funktion bedeutet.

Die Gleichung ihrer Kreiswickelkurve ist daher, wenn der Abszissenkreis den Radius r hat:

$$\rho - r - r \cdot \Theta \left(\frac{r\varphi}{r} \right) = 0$$

oder, setzen wir $\frac{r}{r} = n$:

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{n} \Theta (n\varphi) \right).$$

Die Kurven, welche durch diese Funktion dargestellt sind, sind nur unter gewissen Bedingungen geschlossene Kurven.

Gehört zu einem Wert φ_1 der Wert ρ_1 , so ist

$$\rho_1 = r \left(1 + \frac{1}{n} \Theta (n\varphi_1) \right).$$

Wenn nach h Umläufen von diesem Punkte aus der Wert ρ_2 erreicht wird, so ist

$$\rho_2 = r \left(1 + \frac{1}{n} \Theta n (\varphi_1 + 2\pi \cdot h) \right),$$

und es ist nur dann und immer dann $\rho_2 = \rho_1$, wenn

$$\Theta (n\varphi_1) = \Theta (n\varphi_1 + 2\pi \cdot nh).$$

Dazu ist aber notwendig und hinreichend, dass $n \cdot h$ eine ganze Zahl sei; denn Θ hat die Periode 2π . Soll $n \cdot h$ eine ganze Zahl sein, so muss n eine rationale Zahl sein; denn h ist eine ganze

Zahl. Ist $n = \frac{\mu}{\nu}$, wo μ und ν relativ prim sind, so muss also $\frac{\mu \cdot h}{\nu}$ eine ganze Zahl sein. Dies ist der Fall, wenn

$$h = m\nu, \quad (m = 1, 2, 3 \dots).$$

Nach ν Umläufen wird also stets wieder derselbe Kurvenpunkt erreicht.

Die Kreiswickelkurven sind also immer dann und nur dann geschlossene Kurven, wenn der Radius des Abszissenkreises zu dem Parameter der trigonometrischen Linie in rationalem Verhältnis steht. Ist das Verhältnis irrational, so windet sich die Wickelkurve ∞ oft um den Kreis herum, ohne sich jemals zu schliessen.

Ein entsprechender Satz, wie wir ihn hier für die Kreiswickelkurven der trigonometrischen Linien bewiesen haben, gilt übrigens ganz allgemein für die Wickelkurven und Zerrwickelkurven von periodischen Kurven. Der Beweis mag hier noch nachgefügt werden.

Es sei Θ_λ eine trigonometrische Funktion. Ist die Abszissenkurve eine geschlossene algebraische Kurve, so lässt A sich als Funktion von Θ_λ darstellen, und damit auch:

$$\delta = \delta(\rho, \Theta_\lambda).$$

Die erzeugende Kurve habe nun die Gleichung:

$$y = \Phi(x),$$

wo Φ eine Funktion mit der Periode P sei. Die A-Wickelkurve bzw. A-Zerrwickelkurve dieser Kurve hat dann eine Gleichung von der Form:

$$\delta(\rho, \Theta_\lambda(\varphi)) = \Phi\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\varphi\right).$$

Gehört zu einem Werte φ_1 der Wert ρ_1 , so ist:

$$\delta(\rho_1, \Theta_\lambda(\varphi_1)) = \Phi\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right).$$

Wenn nach h Umläufen von diesem Punkte aus der Wert ρ_2 erreicht wird, so ist:

$$\delta(\rho_2, \Theta_\lambda(\varphi_1 + 2h\pi)) = \Phi\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1 + 2h\pi}\right),$$

$$\delta(\rho_2, \Theta_\lambda(\varphi_1)) = \Phi \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + 2h\pi} \right).$$

Nun ist aber, wenn U der Umfang der Abszissenkurve ist:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + 2h\pi} = h \cdot U,$$

so dass also:

$$\delta(\rho_2, \Theta_\lambda(\varphi_1)) = \Phi \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} + h \cdot U \right).$$

Wie ersichtlich, wird $\rho_2 = \rho_1$, wenn

$$\Phi \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} + h \cdot U \right) = \Phi \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \right).$$

Dies ist immer dann und nur dann der Fall, wenn $h \cdot U = P \cdot \frac{hU}{P}$ ein ganzes Vielfaches von P ist, wenn also $\frac{h \cdot U}{P}$ eine ganze Zahl ist. Da h eine ganze Zahl ist, so ist erforderlich, dass $\frac{U}{P}$ eine rationale Zahl sei. Ist $\frac{U}{P} = \frac{\mu}{\nu}$, wo μ und ν relativ prim, so muss also $\frac{\mu \cdot h}{\nu}$ eine ganze Zahl sein. Dies ist der Fall, wenn $h = m\nu$, ($m = 1, 2, 3 \dots$).

Nach ν Umläufen wird also stets wieder derselbe Punkt erreicht.

Die Wickelkurven und Zerrwickelkurven sind also immer dann und nur dann geschlossene Kurven, wenn der Umfang der Abszissenkurve in rationalem Verhältnis steht zu der Periode der erzeugenden Kurve.

I. Die Kreiswickelkurven der Sinuslinie.

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{n} \sin n\varphi \right).$$

Alle diese Kurven sind Konchoiden der Rhodoneen¹⁾

$$\rho = \frac{r}{n} \sin n\varphi.$$

¹⁾ Ueber Rhodoneen cf. Loria: „Ebene Kurven“, V. Abschnitt, 8. Kapitel und die daselbst angeführte Literatur.

Einige Kreiswickelkurven der Sinuslinie sind auf Tafel 17 gezeichnet.

$$\underline{n = 1}$$

$$\rho = r(1 + \sin \varphi),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{y}{\rho} \right),$$

$$(\rho^2 - ry)^2 = r^2 \rho^2,$$

$$(x^2 + y^2 - ry)^2 = r^2 (x^2 + y^2).$$

Diese Gleichung stellt die bekannte Kardioide dar.

$$\underline{n = 2}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right),$$

$$\rho = r(1 + \sin \varphi \cos \varphi) = r \left(1 + \frac{y}{\rho} \cdot \frac{x}{\rho} \right),$$

$$\rho^3 = r^2 (\rho^2 + xy),$$

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2 (x^2 + y^2 + xy)^2.$$

Diese C^6 ist die Konchoide der vierblättrigen Rhodonee. Sie hat im Koordinatenanfang einen vierfachen isolierten Punkt, in welchem die Geraden

$$x = \omega_1 y$$

$$x = \omega_2 y \quad (\omega = \text{imaginäre dritte Einheitswurzeln})$$

Binodiantangenten sind. Die Kurve ist auf Tafel 17, Fig. 1 gezeichnet.

$$\underline{n = 3}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3} \sin 3\varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3} (3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi) \right) = r \left(1 + \frac{y}{\rho} - \frac{4}{3} \frac{y^3}{\rho^3} \right),$$

$$\rho^4 = r \left(\rho^3 + y\rho^2 - \frac{4}{3} y^3 \right) = r \left(\rho^3 + yx^2 - \frac{1}{3} y^3 \right),$$

$$r^2 (x^2 + y^2)^3 = \left[(x^2 + y^2)^2 + ry \left(\frac{y^2}{3} - x^2 \right) \right]^2.$$

Diese C^8 , welche die Konchoide der dreiblättrigen Rhodonee ist, findet sich auf Tafel 17, Fig. 2 dargestellt. Der Koordinatenanfang ist sechsfacher isolierter Kurvenpunkt.

$$\underline{n = 4}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{4} (4 \sin \varphi \cos \varphi - 8 \sin^3 \varphi \cos \varphi) \right)$$

$$= r \left(1 + \frac{y}{\rho} \cdot \frac{x}{\rho} - 2 \frac{y^3}{\rho^3} \cdot \frac{x}{\rho} \right),$$

$$\rho^5 = r (\rho^4 + xy\rho^2 - 2xy^3),$$

$$(x^2 + y^2)^5 = r^2 [(x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2)]^2.$$

Diese C^{10} ist die Konchoide der 8blättrigen Rhodonee. Sie findet sich auf Tafel 17, Fig. 3 dargestellt. Der Koordinatenanfang ist 8facher isolierter Kurvenpunkt.

$$\underline{n = \frac{1}{2}}$$

$$\rho = r \left(1 + 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \right) = r \left(1 + 2 \sqrt{\frac{\rho - x}{2\rho}} \right),$$

$$\rho^2 - 2r\rho + r^2 = \frac{2(\rho - x)r^2}{\rho},$$

$$\rho^3 - 2r\rho^2 + r^2\rho = 2r^2\rho - 2r^2x,$$

$$\rho(\rho^2 - r^2) = 2r(\rho^2 - rx),$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2 - rx)^2.$$

Diese C^6 ist die Konchoide der Rosenkurve 6. Ordnung¹⁾. Der Koordinatenanfang ist Doppelpunkt. Die Tangenten in demselben bestimmen sich aus:

$$r^4(x^2 + y^2) = 4x^2r^4,$$

$$y^2 - 3x^2 = 0,$$

haben also die Gleichung:

$$y = \pm \sqrt{3} \cdot x.$$

Der Punkt ($x = r$, $y = 0$) ist dreifacher Kurvenpunkt; denn machen wir die Koordinatenverschiebung

$$x = \xi + r, \quad y = \eta,$$

so kommt als Gleichung der Kurve:

$$(\xi^2 + 2r\xi + r^2 + \eta^2)(\xi^2 + 2r\xi + \eta^2)^2 = 4r^2(\xi^2 + r\xi + \eta^2)^2.$$

¹⁾ cf. Loria: „Ebene Kurven.“ Tafel XI, Fig. 76.

Die Tangenten in dem neuen Koordinatenanfang ergeben sich aus dem Aggregat der Glieder niedrigster Potenz. Dieses ist die dritte; denn die Glieder zweiter Potenz $4r^4\xi^2$ heben sich aus der Gleichung fort. Wir erhalten also ein Tangententripel:

$$\xi^3 - \xi\eta^2 = 0.$$

Die Tangenten in dem betrachteten Punkte sind also:

$$\xi = 0, \quad \xi + \eta = 0, \quad \xi - \eta = 0.$$

Der Verlauf der Kurve ist auf Tafel 17, Fig. 4 dargestellt.

II. Die Kreiswickelkurven der Tangenslinie.

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{n} \operatorname{tg} n\varphi \right).$$

Alle diese Kurven sind Konchoiden der Knotenkurven¹⁾

$$\rho = \frac{r}{n} \operatorname{tg} n\varphi.$$

Einige Kreiswickelkurven der Tangenslinie sind auf Tafel 18 gezeichnet.

$$\underline{n = 1}$$

$$\rho = r(1 + \operatorname{tg}\varphi),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{y}{x} \right),$$

$$x^2(x^2 + y^2) = r^2(x + y)^2.$$

Diese C^4 ist die Konchoide der Kappakurve $\rho = r \operatorname{tg}\varphi$.

Sie ist selber eine projektive Kappakurve; denn sie besitzt einen Binodialpunkt und einen einfachen Doppelpunkt. Der Koordinatenanfang ist nämlich Binodialpunkt mit der Binodialtangente:

$$x + y = 0.$$

Der ∞ ferne Punkt der y -Achse ist gewöhnlicher Doppelpunkt. Die Asymptoten sind:

$$y = \pm r.$$

Die Kurve ist auf Tafel 18, Fig. 1 gezeichnet.

$$\underline{n = 2}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi \right),$$

¹⁾ Ueber Knotenkurven cf. Loria: „Ebene Kurven“, pag. 184.

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) = r \left(1 + \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{xy}{x^2 - y^2} \right),$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = r^2(x^2 - y^2 + xy)^2.$$

Diese C^6 ist Konchoide der sog. „Windmühle“¹⁾. Im Koordinatenanfang hat sie einen achtfachen Punkt, in welchem die beiden Geraden

$$y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})x$$

Binodialtangente sind. Die Asymptoten der Kurve sind den Geraden

$$x \pm y = 0$$

parallel. Setzen wir

$$x \pm y = c$$

in die Gleichung der Kurve ein, so ergibt sich:

$$(2y^2 \pm 2cy + c^2)(\pm 2cy + c^2)^2 = r^2(\pm 2cy + cy + c^2 \pm y^2)^2.$$

Hieraus folgt:

$$2y^2 \cdot 4c^2y^2 = r^2y^4,$$

$$c = \pm \frac{r}{4}\sqrt{2}.$$

Die 4 Asymptoten sind also:

$$x + y = \pm \frac{r}{4}\sqrt{2},$$

$$x - y = \pm \frac{r}{4}\sqrt{2}.$$

Die Kurve ist auf Tafel 18, Fig. 2 gezeichnet.

$$\underline{n = 3}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3\varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) = r \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - 3 \frac{y^2}{x^2}} \right),$$

¹⁾ cf. Loria: „Ebene Kurven“, pag. 184.

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} \right) = r \cdot \frac{x^3 - 3xy^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3}{x^3 - 3xy^2},$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2) \cdot x^2 = r^2 \left(x^3 - 3xy^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \right)^2.$$

Ganz entsprechend wie im Falle $n = 2$ ist der Koordinatenanfang hier 6facher Kurvenpunkt mit drei Binodiantangenten. Die Asymptoten sind parallel den Geraden:

$$x = 0, \quad x \pm \sqrt{3} \cdot y = 0.$$

Den Verlauf der Kurve zeigt Tafel 18, Fig. 3.

$$\underline{n = 4}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4\varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \operatorname{tg} \varphi - 4 \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi} \right) = r \left(1 + \frac{\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - 6 \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4}} \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{yx^3 - xy^3}{x^4 - 6x^2y^2 + y^4} \right),$$

$$(x^2 + y^2)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)^2 = r^2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + yx^3 - xy^3)^2.$$

Der Koordinatenanfang ist 8facher Kurvenpunkt mit 4 Binodiantangenten. Die Asymptoten sind parallel den Geraden:

$$y = \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{2}},$$

$$y = \pm \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Die Kurve ist dargestellt auf Tafel 18, Fig. 4.

$$\underline{n = \frac{1}{2}}$$

$$\rho = r \left(1 + 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{2}{\sin \varphi} - 2 \cot \varphi \right) = r \left(1 + \frac{2\rho}{y} - \frac{2x}{y} \right),$$

$$\rho y = r(y - 2\rho - 2x),$$

$$\rho(y - 2r) = r(y - 2x),$$

$$(x^2 + y^2)(y - 2r)^2 = r^2(y - 2x)^2.$$

Multiplizieren wir aus, so ergibt sich:

$$(x^2 + y^2)(y^2 - 4ry) + 4r^2(x^2 + y^2) = r^2(y^2 - 4xy) + 4r^2x^2.$$

Da $4r^2x^2$ sich aus der Gleichung forthebt, so zerfällt die Kurve in die Gerade $y = 0$ und die C^3 :

$$(x^2 + y^2)(y - 4r) + 4r^2y = r^2(y - 4x),$$

$$(x^2 + y^2)(y - 4r) + 3r^2y + 4r^2x = 0.$$

Dass die Kurve sich auf eine C^3 reduziert, ist natürlich; denn sie ist Konchoide der Strophoide¹⁾ $\rho = 2r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, die auch eine C^3 ist.

Die Kurve hat im Koordinatenanfang die Tangente:

$$3y + 4x = 0.$$

Die Asymptote ist parallel der x -Achse. Setzen wir $y = c$, so erhalten wir:

$$(x^2 + c^2)(c - 4r) + 3r^2c + 4r^2x = 0,$$

und hieraus folgt $c = 4r$, so dass also die Gleichung der Asymptote lautet:

$$y = 4r.$$

Der Punkt ($x = r$, $y = 2r$) ist Doppelpunkt, wie man leicht durch Koordinatenverschiebung beweisen kann. Die Kurve besitzt ähnliche Gestalt wie die auf pag. 21 abgeleitete C^3 . Sie ist aber kein Spezialfall derselben. Der Verlauf der Kurve ist auf Tafel 18, Fig. 5 angegeben.

III. Die Kreiswickelkurven der Secanslinie.

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{n} \sec n \varphi \right).$$

Alle diese Kurven sind Konchoiden der Kurven:

$$\rho = \frac{r}{n} \sec n \varphi.$$

Letztere sind zum Teil noch nicht untersucht und sollen deshalb hier mit angeführt werden.

$$\underline{n = 1}$$

$$\rho = r(1 + \sec \varphi),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{\rho}{x} \right),$$

$$\rho x = r(x + \rho),$$

$$(x^2 + y^2)(x - r)^2 = r^2x^2.$$

¹⁾ cf. Loria: „Ebene Kurven“, pag. 62.

Die erste Kreiswickelkurve der Secanslinie ist also die Konchoide des Nikomedes.

$$\underline{n = 2}$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{2} \sec 2\varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \right) = r \left(1 + \frac{1}{2\left(\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2}\right)} \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{\rho^2}{2(x^2 - y^2)} \right) = r \cdot \frac{3x^2 - y^2}{2(x^2 - y^2)},$$

$$4(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = r^2(3x^2 - y^2)^2.$$

Diese C^6 hat im Koordinatenanfang einen vierfachen Punkt mit den Binodiantangenten:

$$y \pm \sqrt{3} \cdot x = 0.$$

Die Asymptoten sind parallel zu den Geraden:

$$x \pm y = 0.$$

Setzen wir $x \pm y = c$, so ergibt sich:

$$4(c^2 \pm 2cy + 2y^2)(c^2 \pm 2cy)^2 = r^2(3c^2 \pm 6cy + 2y^2)^2,$$

woraus folgt:

$$8y^2 \cdot 4c^2y^2 = 4r^2y^4,$$

$$c = \pm \frac{r}{4}\sqrt{2}.$$

Die beiden Asymptotenpaare sind also:

$$x - y = \pm \frac{r}{4}\sqrt{2},$$

$$x + y = \pm \frac{r}{4}\sqrt{2}.$$

Die Kurve findet sich gezeichnet auf Tafel 19, Fig. 1. Sie ist eine Konchoide der Kurve:

$$\rho = \frac{r}{2} \sec 2\varphi,$$

$$\rho = \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2}},$$

$$4(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = r^2(x^2 + y^2)^2.$$

Diese zerfällt in die imaginären Kreispunkte und die C^4 :

$$4(x^2 - y^2)^2 = r^2(x^2 + y^2).$$

Letztere hat im Koordinatenanfang einen isolierten Doppelpunkt. Ihre Asymptoten sind dieselben wie bei der Kreiswickelkurve.

Die Kurve ist gezeichnet auf Tafel 20, Fig. 1. Sie ist bekannt als „Kreuzkurve“. Führen wir das System der beiden Medianen als Koordinatensystem ein, so lautet die Gleichung der Kurve:

$$\frac{\left(\frac{r}{8}\right)^2}{\xi^2} + \frac{\left(\frac{r}{8}\right)^2}{\eta^2} = 1.$$

n = 3

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3} \sec 3\varphi \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{1}{3(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi)} \right) = r \left(1 + \frac{1}{3\left(4\frac{x^3}{\rho^3} - 3\frac{x}{\rho}\right)} \right),$$

$$\rho = r \left(1 + \frac{\rho^3}{3(4x^3 - 3x\rho^2)} \right) = r \frac{12x^3 - 9x\rho^2 + \rho^3}{3(4x^3 - 3x\rho^2)},$$

$$\rho \cdot (3x^3 - 9xy^2) = r \cdot (3x^2 - 9xy^2) + r\rho^3,$$

$$\rho(3x^3 - 9xy^2 - r(x^2 + y^2)) = 3r(x^3 - 3xy^2),$$

$$(x^2 + y^2)[3x(x^2 - 3y^2) - r(x^2 + y^2)]^2 = 9r^2x^2(x^2 - 3y^2)^2.$$

Diese C³ hat im Koordinatenanfang einen 6fachen Punkt. Die Tangenten in demselben bestimmen sich aus:

$$(x^2 + y^2)^3 = 9x^2(x^2 - 3y^2)^2.$$

Die Asymptoten sind parallel den Geraden:

$$x = 0,$$

$$x \pm \sqrt{3} \cdot y = 0.$$

Setzen wir $x = c$, so folgt:

$$(c^2 + y^2)[3c(c^2 - 3y^2) - r(c^2 + y^2)]^2 = 9r^2c^2(c^2 - 3y^2)^2$$

und hieraus:

$$y^2(-9cy^2 - ry^2)^2 = 0,$$

$$c = -\frac{r}{9}.$$

Die erste Asymptote ist also:

$$x = -\frac{r}{9}.$$

Setzen wir:

$$x = c \pm \sqrt{3} \cdot y,$$

so erhalten wir aus

$$\begin{aligned} (c^2 \pm 2c\sqrt{3} \cdot y + 4y^2) [3(c \pm \sqrt{3} \cdot y)(c^2 \pm 2c\sqrt{3} \cdot y) \\ - r^2(c^2 \pm 2c\sqrt{3} \cdot y + 4y^2)]^2 = 9r^2(c \pm \sqrt{3} \cdot y)^2(c^2 \pm 2c\sqrt{3} \cdot y)^2 : \\ 16y^2(3 \cdot 3 \cdot 2c \cdot y^2 - 4r^2y^2)^2 = 0, \\ c = \frac{2}{9}r, \end{aligned}$$

so dass also die zweite und dritte Asymptote die Gleichungen haben:

$$x \pm \sqrt{3} \cdot y = \frac{2}{9}r.$$

Die Kurve ist auf Tafel 19, Fig. 2 gezeichnet. Sie ist eine Konchoide der Kurve:

$$\begin{aligned} \rho &= r \cdot \frac{1}{3} \sec 3\varphi, \\ \rho &= \frac{r}{3} \cdot \frac{1}{4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi} = \frac{r}{3} \cdot \frac{1}{4 \frac{x^3}{\rho^3} - 3 \frac{x}{\rho}}, \\ 3\rho &= \frac{r\rho^3}{4x^3 - 3x\rho^2}, \\ 3\rho(x^3 - 3y^2x) &= r\rho(x^2 + y^2), \\ 9(x^2 + y^2)(x^3 - 3y^2x)^2 &= r^2(x^2 + y^2)^3. \end{aligned}$$

Diese zerfällt in die imaginären Kreispunkte und die C^6 :

$$9(x^2 - 3y^2)^2 x^2 = r^2(x^2 + y^2)^2.$$

Letztere hat im Koordinatenanfang einen vierfachen isolierten Punkt mit den Geraden

$$x \pm iy = 0$$

als Binodiantangenten. Die Asymptoten sind parallel den Geraden:

$$x = 0,$$

$$x \pm \sqrt{3} \cdot y = 0.$$

Setzen wir $x = c$, so folgt aus

$$9(c^2 - 3y^2)^2 c^2 = r^2(c^2 + y^2)^2:$$

$$81y^4 c^2 = r^2 y^4,$$

$$c = \pm \frac{r}{9},$$

so dass das erste Asymptotenpaar die Gleichung hat:

$$x = \pm \frac{r}{9}.$$

Setzen wir $x = c \pm \sqrt{3} \cdot y$, so folgt aus

$$9(c^2 \pm 2c\sqrt{3} \cdot y)^2 (c \pm \sqrt{3} \cdot y)^2 = r^2 (c^2 \pm 2c\sqrt{3} \cdot y + 4y^2)^2:$$

$$9 \cdot 4c^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot 3y^2 = r^2 \cdot 16y^4,$$

$$81c^2 = 4r^2,$$

$$c = \pm \frac{2}{9}r.$$

Die Gleichungen der andern beiden Asymptotenpaare lauten also:

$$x + \sqrt{3} \cdot y = \pm \frac{2}{9}r,$$

$$x - \sqrt{3} \cdot y = \pm \frac{2}{9}r.$$

Die Kurve ist auf Tafel 20, Fig. 2 dargestellt.

$$\underline{n = \frac{1}{2}}$$

$$\rho = r \left(1 + 2 \sec \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\rho = r \left(1 + 2 \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \varphi}} \right) = r \left(1 + 2 \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{x}{\rho}}} \right),$$

$$(\rho - r)^2 = \frac{8r^2 \rho}{\rho + x},$$

$$\rho^3 - 2r\rho^2 + r^2\rho + x\rho^2 - 2r\rho x + r^2x = 8r^2\rho,$$

$$\rho(x^2 + y^2 - 7r^2 - 2rx) = [(x^2 + y^2)(2r - x) - r^2x],$$

$$(\bar{x}^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 7r^2 - 2rx)^2 = [(x^2 + y^2)(2r - x) - r^2x]^2.$$

Diese Kurve ist auf Tafel 19, Fig. 3 dargestellt. Sie ist Konchoide der Kurve:

$$\rho = 2r \sec \frac{\varphi}{2},$$

$$\rho = 2r \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{x}{\rho}}} = 2r \sqrt{\frac{2\rho}{x + \rho}},$$

$$\rho^2 = 4r^2 \frac{2\rho}{x + \rho},$$

$$x\rho^2 + \rho^3 = 8r^2\rho,$$

$$\rho(\rho^2 - 8r^2) = -x\rho^2,$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 8r^2)^2 = x^2(x^2 + y^2)^2.$$

Die Kurve zerfällt in die imaginären Kreispunkte und die C^4 :

$$(x^2 + y^2 - 8r^2)^2 = x^2(x^2 + y^2).$$

Letztere findet sich auf Tafel 20, Fig. 3 dargestellt.

Schluss.

Zum Schluss möge bemerkt werden, dass man das Problem, das wir behandelt haben, auch umkehren kann. Anstatt also die Kurve Γ auf die Kurve A aufzuwickeln, kann man sie auch als auf die Kurve A aufgewickelt betrachten und sie abwickeln. Bei dieser Transfiguration würden wir auch auf eine ganze Reihe neuer Kurven stossen.

Auch kann man das Problem auf den Raum anwenden und es sowohl zur Erzeugung von Flächen wie von Raumkurven benutzen.

Um Raumkurven zu erzeugen, können wir z. B. eine Raumkurve R_1 als Abszissenkurve benutzen und eine ebene Kurve K in der Schmiegungsfläche der Raumkurve R_1 auf die Raumkurve aufwickeln. Oder, noch allgemeiner: Wir denken eine Raumkurve R als mit einer Ebene E fest verbunden und wickeln eine Gerade dieser Ebene auf R auf, und die Ebene E auf die Schmiegungsfläche von R .

Um Flächen zu erzeugen, nehmen wir auf einer Fläche F_1 eine Schar von Kurven C an und irgendwo auf der Fläche F_1 eine die Kurven C schneidende Kurve R . Von dieser festen Kurve R an wickeln wir dann auf den Schmiegungsflächen der Kurven C die erzeugende ebene Kurve K ab und erhalten eine Fläche F_2 .

Sind z. B. F_1 eine Kugelfläche, C die Meridiane, R der Aequator derselben, und K eine Gerade, so ist F_2 die Rotationsfläche einer Archimedischen Spirale.

Lebenslauf.

Ich, Friedrich Karl Harms, ev.-luth. Konfession, oldenburgischer Staatsangehörigkeit, wurde am 3. September 1889 als Sohn des Landwirts Fr. Harms zu Borbeck im Grossherzogtum Oldenburg geboren. Von meinem 6. Lebensjahre an besuchte ich die Dorfschule zu Borbeck und kam hierauf im Jahre 1900 auf die Oberrealschule zu Oldenburg, wo ich Ostern 1909 das Reifezeugnis erwarb. Vom 1. April 1909 bis 1. April 1910 genügte ich alsdann meiner Militärpflicht beim Füsilier-Regiment No. 90 zu Rostock, indem ich gleichzeitig dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie oblag. Nach meiner Dienstzeit setzte ich meine Studien fort und zwar im S.-S. 1910 in Rostock, im W.-S. 1910/11 in München, im S.-S. 1911 in Berlin und seit W.-S. 1911/12 wieder in Rostock. Die akademischen Lehrer, an deren Vorlesungen und Uebungen ich teilnahm, sind

in Berlin die Herren:

Prof. Dr. Blasius, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Förster, Prof. Dr. Münsterberg, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Riehl, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Schwarz, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Stumpf;

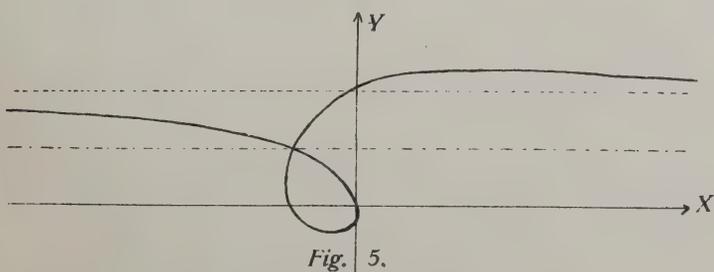
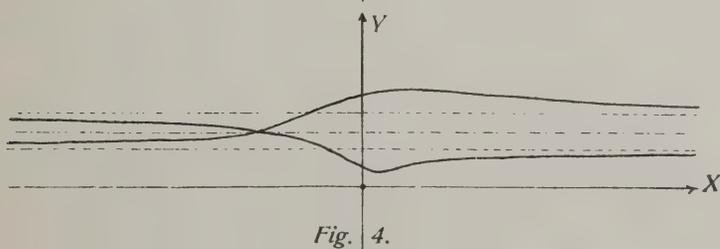
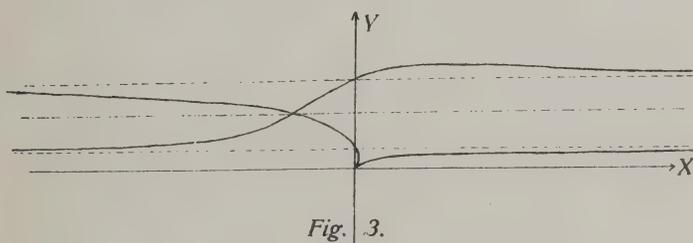
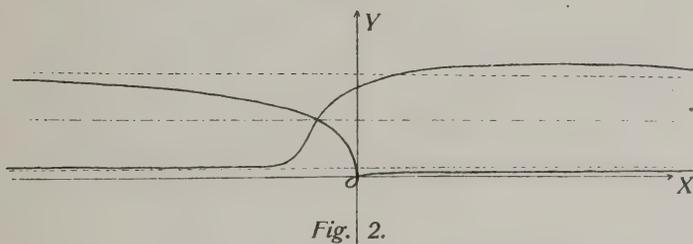
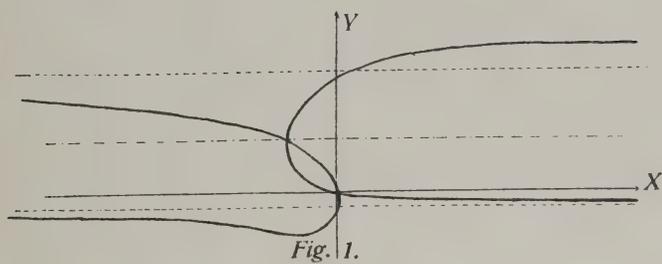
in München die Herren:

Prof. Dr. Döhlemann, Geh. Hofrat Prof. Dr. Ritter v. Göbel, Prof. Dr. Graetz, Privatdozent Dr. Koch, Privatdozent Dr. Laue, Geh. Hofrat Prof. Dr. Lindemann, Prof. Dr. Pringsheim;

in Rostock die Herren:

Prof. Dr. Erhardt, Prof. Dr. Falkenberg, Geh. Hofrat Prof. Dr. Geinitz, Prof. Dr. Heydweiller, Prof. Dr. Kümmell, Geh. Hofrat Prof. Dr. Michaelis, Privatdozent Dr. Schlick, Kaiserl. Russ. Staatsrat u. Geh. Hofrat Prof. Dr. Staude, Prof. Dr. Weber, Prof. Dr. Will.

Allen meinen Lehrern schulde ich Dank, insbesondere aber für die freundliche Förderung bei der vorliegenden Arbeit Herrn Geheimrat Staude.



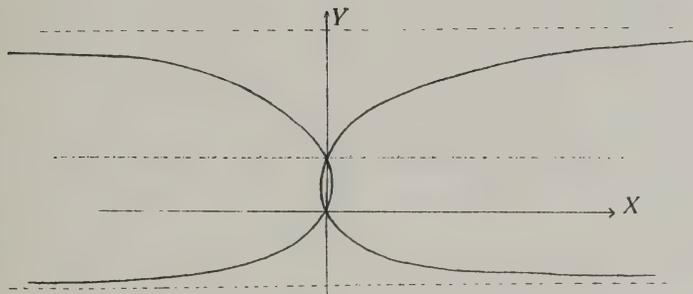


Fig. 1.

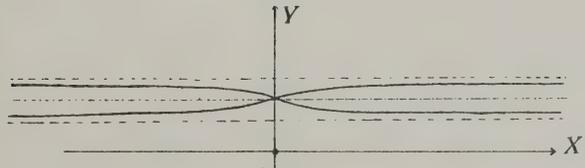


Fig. 2.

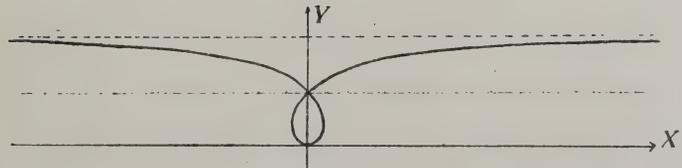
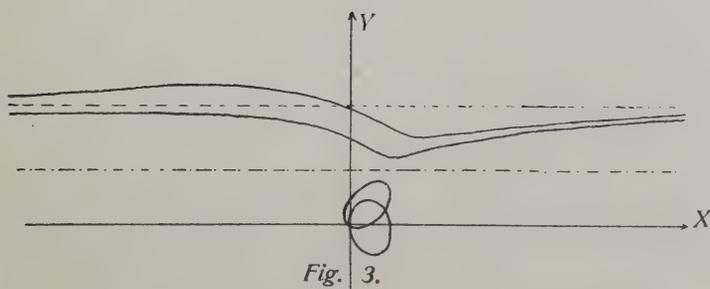
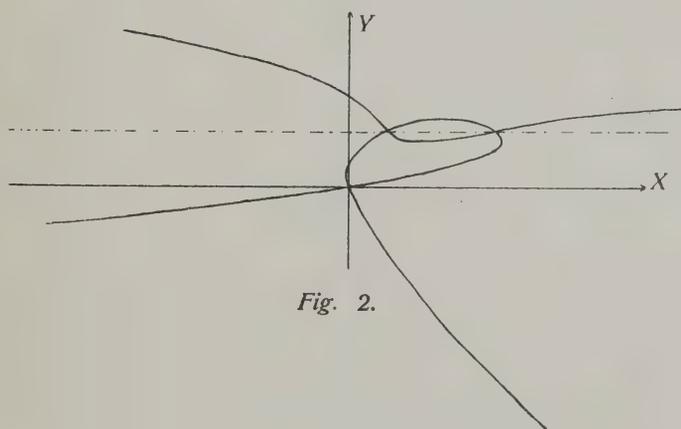
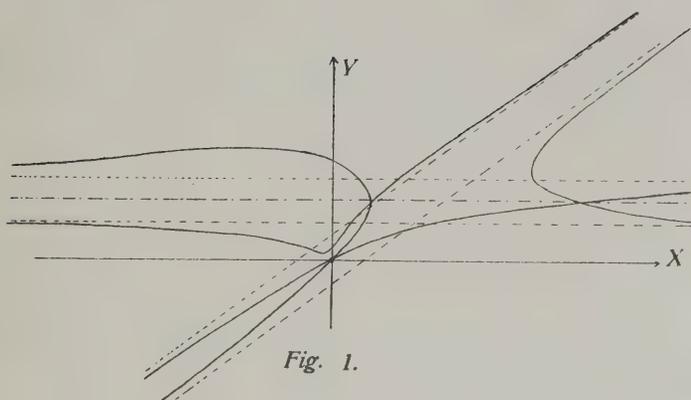


Fig. 3.



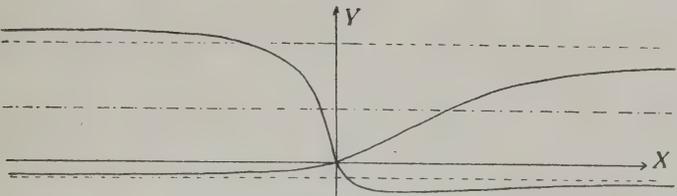


Fig. 1.

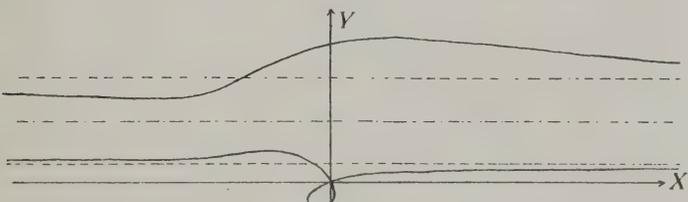


Fig. 2.

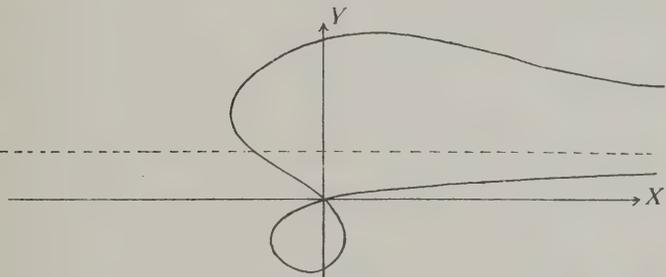


Fig. 3.

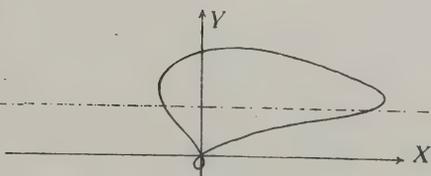


Fig. 4.

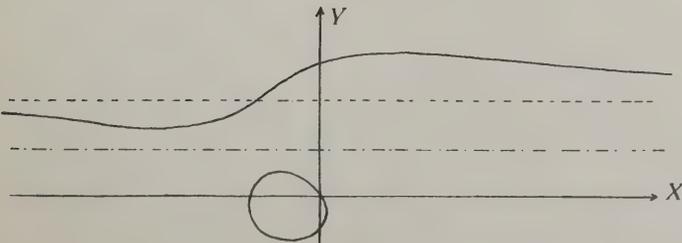
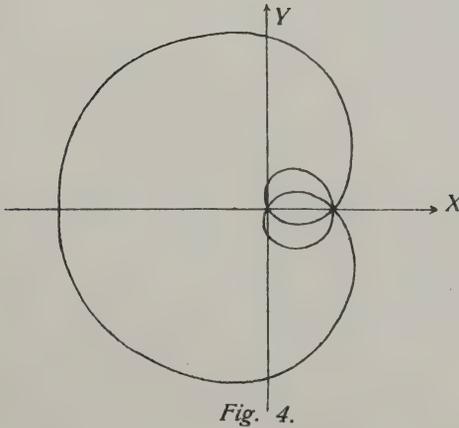
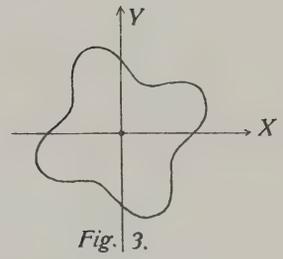
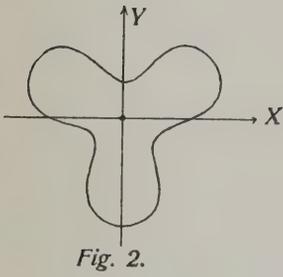
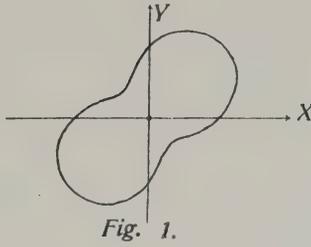
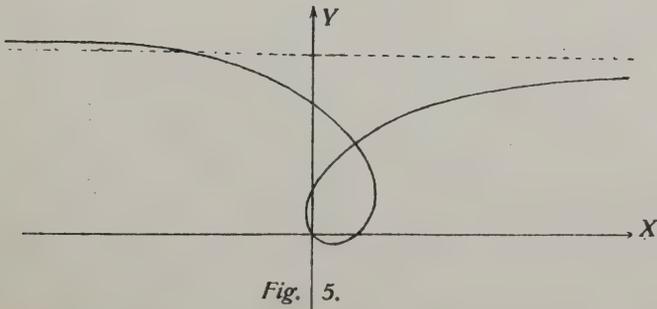
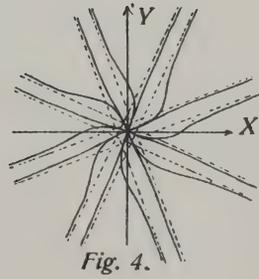
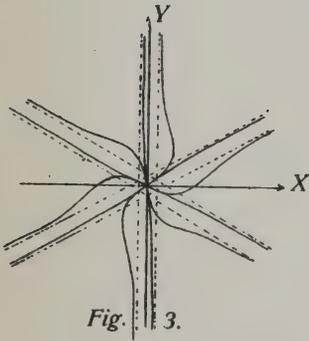
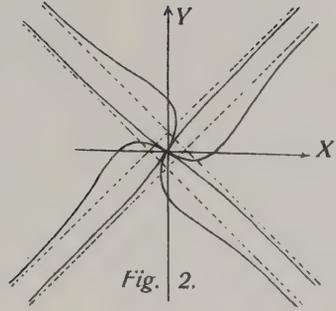
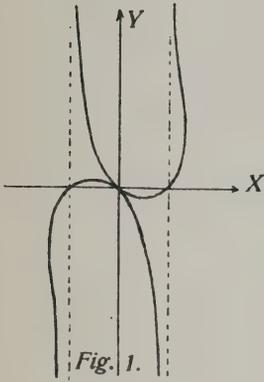
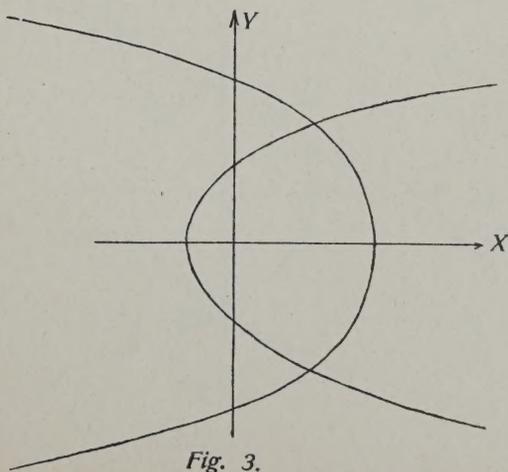
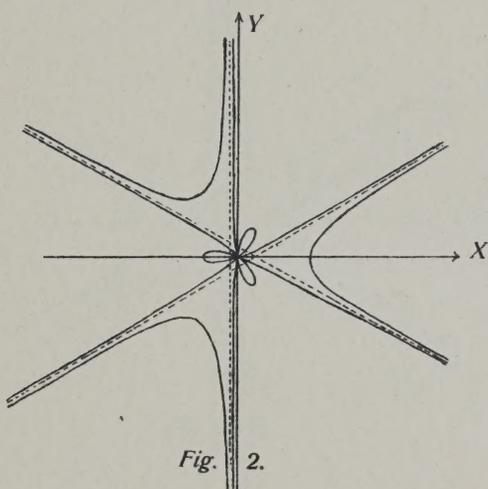
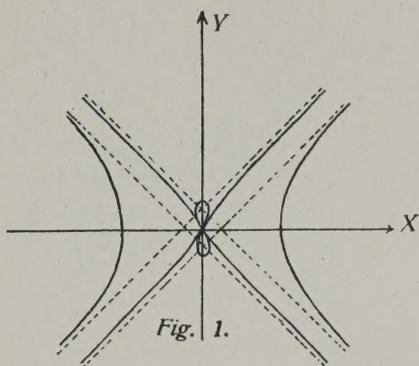


Fig. 5.







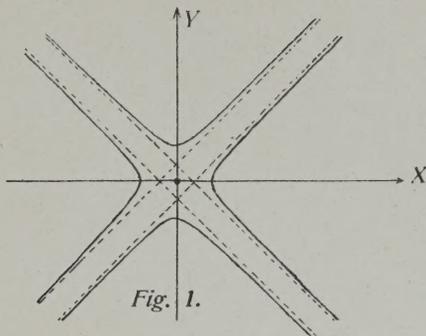


Fig. 1.

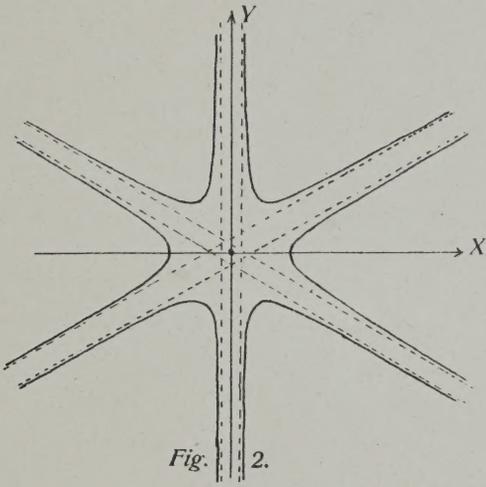


Fig. 2.

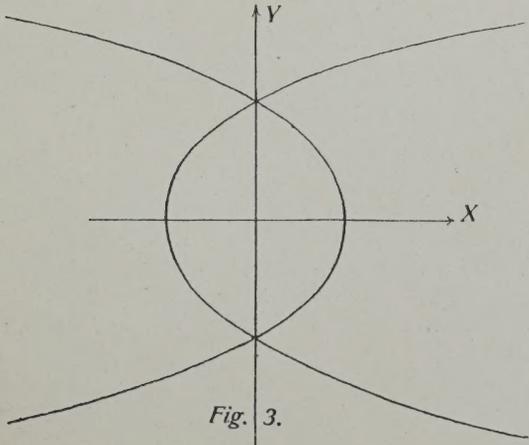


Fig. 3.

